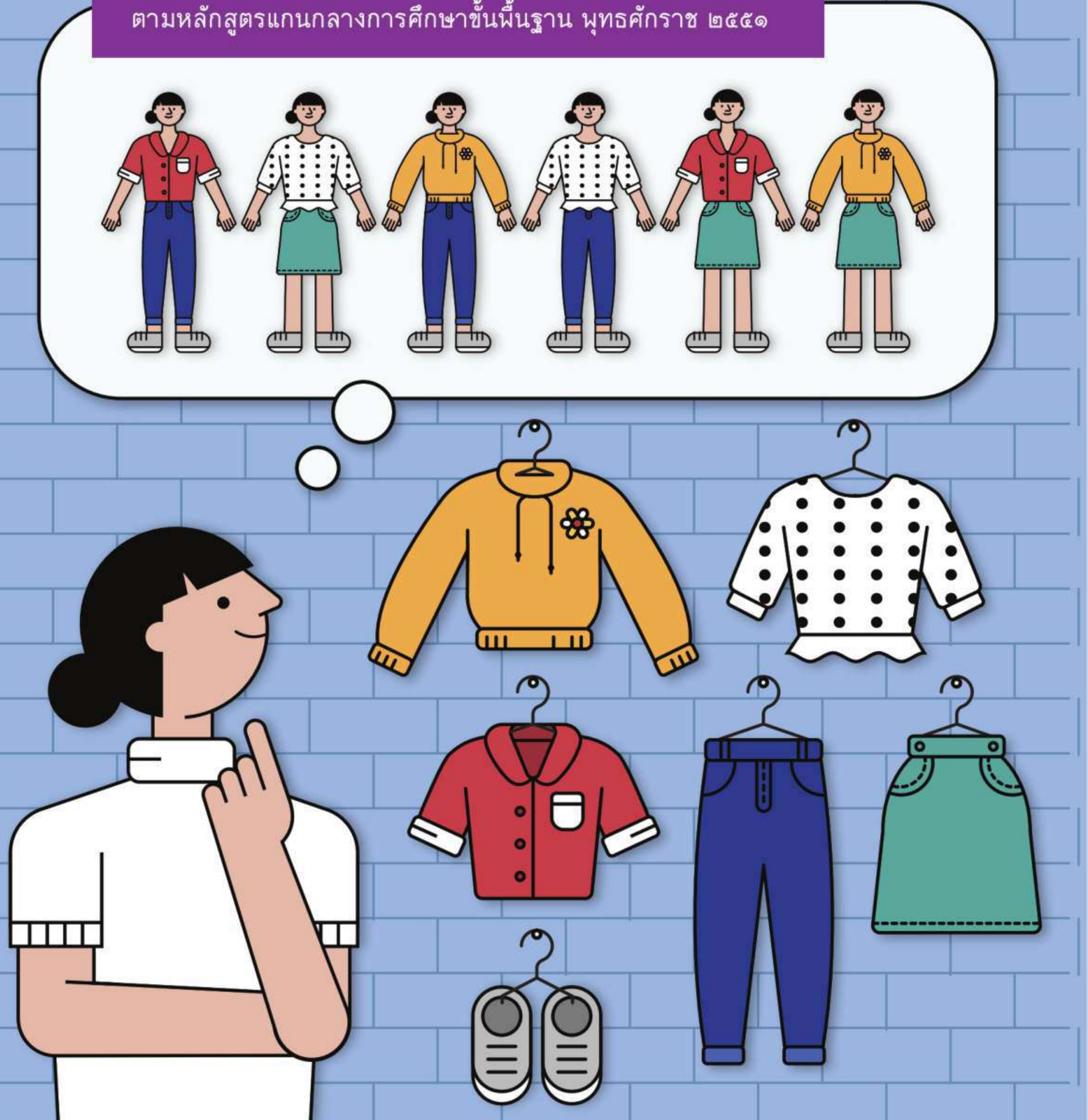
หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติม

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕

คณิตศาสตร์

เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑



หนังสือเรียน

รายวิชาเพิ่มเติม

คณิตศาสตร์

ชั้น

มัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒

ตามผลการเรียนรู้
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐)
ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑

จัดทำโดย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

จัดทำเป็นฉบับ e-book ครั้งที่ ๑ พ.ศ. ๒๕๖๓

คำชี้แจง

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (สสวท.) ได้จัดทำตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช ๒๕๕๑ โดยมีจุดเน้นเพื่อต้องการพัฒนาผู้เรียนให้มีความรู้ความสามารถที่ทัดเทียมกับนานาชาติ ได้เรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เชื่อมโยงความรู้กับกระบวนการคิด ใช้กระบวนการสืบเสาะหาความรู้และแก้ปัญหาที่หลากหลาย มีการทำกิจกรรมด้วยการลงมือปฏิบัติเพื่อให้ผู้เรียนได้ใช้ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์และทักษะแห่งศตวรรษที่ ๒๑ ซึ่งในปีการศึกษา ๒๕๖๑ เป็นต้นไปนี้ โรงเรียนจะต้องใช้หลักสูตรกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๖๐) สสวท. จึงได้จัดทำหนังสือเรียนที่เป็นไปตามมาตรฐานหลักสูตรเพื่อให้โรงเรียนได้ใช้สำหรับจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียน

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒ นี้ มีผลการเรียนรู้และสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมที่ครอบคลุมเนื้อหาบางส่วนที่ปรากฏตามตัวชี้วัดรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ โดยเมื่อผู้เรียนเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ทั้ง ๖ เล่ม ครบทุกชั้นปีในระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๔ – ๖ แล้วจะสามารถบรรลุผลสัมฤทธิ์ตามตัวชี้วัดของรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ได้ และในขณะเดียวกันก็สามารถต่อยอดเนื้อหาจากรายวิชาพื้นฐานไปสู่เนื้อหาในรายวิชาเพิ่มเติมได้โดยไม่ต้องเสียเวลาเรียนซ้ำซ้อน ทั้งนี้ หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม ๒ นี้ มีเนื้อหาที่จำเป็นที่ต้องเรียน ประกอบด้วยเรื่องจำนวนเชิงซ้อน หลักการนับเบื้องต้น และความน่าจะเป็น ซึ่งเป็นพื้นฐานที่สำคัญและเพียงพอสำหรับการศึกษาต่อในระดับอุดมศึกษาในด้านวิทยาศาสตร์ หรือประกอบอาชีพในสาขาที่ใช้วิทยาศาสตร์เป็นฐาน เช่น แพทย์ ทันตแพทย์ สัตวแพทย์ เทคโนโลยีชีวภาพ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม เศรษฐศาสตร์ พาณิชยศาสตร์ ฯลฯ โดยเน้นกระบวนการคิดวิเคราะห์และการแก้ปัญหา เชื่อมโยงความรู้สู่การนำไปใช้ในชีวิตจริง ตลอดจนมีกิจกรรมที่ส่งเสริมให้ผู้เรียนทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีประสิทธิภาพ รวมทั้งสามารถใช้คณิตศาสตร์เป็นเครื่องมือในการเรียนรู้วิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี และศาสตร์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้อง อันเป็นรากฐานในการพัฒนาทรัพยากรบุคคลของชาติให้มีคุณภาพและพัฒนาเศรษฐกิจของประเทศ

การจัดทำหนังสือเรียนเล่มนี้ ได้รับความร่วมมืออย่างดียิ่งจากผู้ทรงคุณวุฒิ นักวิชาการอิสระ คณาจารย์ทั้งหลาย รวมทั้งครูผู้สอน นักวิชาการ จากสถาบันและสถานศึกษาทั้งภาครัฐและเอกชน จึงขอขอบคุณทุกท่านไว้ ณ ที่นี้ หากมีข้อเสนอแนะใดที่จะทำให้หนังสือเรียนเล่มนี้มีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น โปรดแจ้ง สสวท. ทราบด้วย จะขอบคุณยิ่ง

(ศาสตราจารย์ชูกิจ ลิมปิจำนงค์)
ผู้อำนวยการสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ

คำอธิบายรายวิชา

หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ **ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ ๕ เล่ม ๒**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
ภาคเรียนที่ ๒ **เวลา ๑๐๐ ชั่วโมง** **จำนวน ๒.๕ หน่วยกิต**

ศึกษา พร้อมทั้งฝึกทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาของสาระ ดังนี้

จำนวนเชิงซ้อน จำนวนเชิงซ้อน สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน สมการพหุนามตัวแปรเดียว

หลักการนับเบื้องต้น หลักการบวกและหลักการคูณ การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด ทฤษฎีบททวินาม

ความน่าจะเป็น การทดลองสุ่มและเหตุการณ์ ความน่าจะเป็น กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

โดยจัดประสบการณ์ให้ผู้เรียนได้พัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ อันได้แก่ การแก้ปัญหา การสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ การเชื่อมโยง การให้เหตุผล และการคิดสร้างสรรค์

การใช้สื่อ อุปกรณ์ เทคโนโลยี และแหล่งข้อมูล และนำประสบการณ์ ตลอดจนทักษะและกระบวนการที่ได้ ไปใช้ในการเรียนรู้สิ่งต่าง ๆ และใช้ในชีวิตประจำวันอย่างสร้างสรรค์ รวมทั้งเห็นคุณค่าและมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ สามารถทำงานอย่างเป็นระบบ มีความรอบคอบ และมีวิจารณญาณ

การวัดผลประเมินผล ใช้วิธีการที่หลากหลายตามสภาพความเป็นจริงให้สอดคล้องกับเนื้อหาและทักษะที่ต้องการวัด

ผลการเรียนรู้

๑. เข้าใจจำนวนเชิงซ้อนและใช้สมบัติของจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
๒. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า ๑
๓. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา
๔. เข้าใจและใช้หลักการบวกและการคูณ การเรียงสับเปลี่ยน และการจัดหมู่ ในการแก้ปัญหา
๕. หาความน่าจะเป็นและนำความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นไปใช้

รวมทั้งหมด ๕ ผลการเรียนรู้

แนะนำการใช้หนังสือเรียน

ส่วนนี้เป็นส่วนแนะนำโครงสร้างของหนังสือเรียนเพื่อการใช้หนังสือเรียนอย่างมีประสิทธิภาพ

ในหนังสือเล่มนี้จะแบ่งบทเรียนเป็น 3 บท โดยแต่ละบทจะมีส่วนประกอบ ดังนี้

“ .... ”

ส่วนนำของบท

เกริ่นนำบทด้วยข้อมูลที่น่าสนใจ รวมถึงการนำไปใช้ในชีวิตจริง เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการเรียนเนื้อหาในบท

จุดมุ่งหมาย

เป้าหมายที่นักเรียนควรไปถึงหลังจากเรียนจบบทนี้

จุดมุ่งหมาย

ความรู้ก่อนหน้า

ความรู้ที่นักเรียนจำเป็นต้องมีก่อนที่จะเรียนบทนี้

ความรู้ก่อนหน้า

เสริมสมอง

เกร็ดความรู้หลากหลายรูปแบบเพื่อกระตุ้นความสนใจของนักเรียน เช่น ประวัตินักคณิตศาสตร์ ตัวอย่างการนำเนื้อหาคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตจริง การเชื่อมโยงเนื้อหาในบทกับวิชาอื่น

เสริมสมอง

กิจกรรม

กิจกรรมที่นักเรียนสามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (learning and innovation skills) ที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 อันได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม (creativity and innovation) การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา (critical thinking and problem solving) การสื่อสาร (communication) และการร่วมมือ (collaboration)

กิจกรรม

เทคโนโลยี

โจทย์ที่มีไอคอนนี้สามารถใช้เทคโนโลยีช่วยในการคิดได้ โดยอาจใช้เครื่องคิดเลข โปรแกรมสำเร็จรูปในคอมพิวเตอร์ โปรแกรมประยุกต์ในโทรศัพท์สมาร์ตโฟน การค้นหาข้อมูลทางอินเทอร์เน็ต และอื่น ๆ ตามความเหมาะสม

โจทย์ท้าทาย

โจทย์ที่มีไอคอนนี้เป็นโจทย์ที่ค่อนข้างยากและซับซ้อนกว่าโจทย์แบบฝึกหัดทั่วไป เพื่อท้าทายความสามารถของนักเรียนที่ต้องการพัฒนาทักษะเพิ่มเติมนอกเหนือจากการเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท

แบบฝึกหัด

โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้ระหว่างเรียน มีวัตถุประสงค์เพื่อพัฒนาการเรียนรู้ของนักเรียน ช่วยให้นักเรียนสามารถตรวจสอบความรู้ความเข้าใจของตนเองได้

แบบฝึกหัด

แบบฝึกหัดท้ายบท

แบบฝึกหัดท้ายบทแบ่งประเภทได้เป็น

- โจทย์เพื่อตรวจสอบความรู้หลังเรียนจบบท มีวัตถุประสงค์เพื่อวัดความรู้ความเข้าใจของนักเรียนตามจุดมุ่งหมายของบท โดยจะมีแถบสี
- โจทย์ท้าทาย
- โจทย์เพื่อฝึกทักษะ ที่มีความน่าสนใจ โดยจะไม่มีแถบสีและไม่มีไอคอนหน้าเลขข้อ

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 ....
....

2. ....
....

3. ....
....

บทที่ 1 จะใช้สี บทที่ 2 จะใช้สี บทที่ 3 จะใช้สี

สารบัญ บทที่ 1 – 2

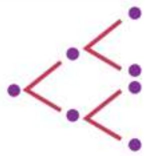
บทที่	เนื้อหา	หน้า

1

$i^2 = -1$

จำนวนเชิงซ้อน

2



หลักการนับเบื้องต้น

สารบัญ

บทที่ 3



บทที่ 1 | จำนวนเชิงซ้อน

$$i^2 = -1$$

- 1.1 จำนวนเชิงซ้อน
- 1.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.3 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.5 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน
- 1.7 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้ความรู้เกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนในการแก้ปัญหา
2. หารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน
3. หารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1
4. แก้สมการพหุนามตัวแปรเดียวดีกรีไม่เกินสี่ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน

“

จำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนที่สร้างจากการขยายระบบจำนวนจริง เพื่อให้สมการพหุนามทุกสมการมีคำตอบ ซึ่งถึงแม้การสร้างจำนวนเชิงซ้อนจะมีวัตถุประสงค์ในการแก้ปัญหาในเรื่องดังกล่าว แต่จำนวนเชิงซ้อนยังสามารถนำไปประยุกต์ได้อย่างกว้างขวางในสาขาต่าง ๆ ทางด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ เช่น ในการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า (circuit analysis) เนื่องจากในวงจรไฟฟ้ากระแสสลับมีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณต่าง ๆ คล้ายกับฟังก์ชันตรีโกณมิติซึ่งเป็นฟังก์ชันที่เป็นคาบ โดยสามารถใช้จำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วร่วมกับสูตรของออยเลอร์ (Euler’s formula) ซึ่งกล่าวว่า $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x มาช่วยลดความยุ่งยากซับซ้อนในการคำนวณ ความรู้เรื่องจำนวนเชิงซ้อนจึงมีประโยชน์อย่างมากในการคำนวณและวิเคราะห์ปริมาณต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องในเรื่องการวิเคราะห์วงจรไฟฟ้า และเรื่องอื่น ๆ ที่มีการเปลี่ยนแปลงของปริมาณในลักษณะที่เป็นคาบ เช่น ในการศึกษาเกี่ยวกับคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า พฤติกรรมของอนุภาคในกลศาสตร์ควอนตัม ฯลฯ จำนวนเชิงซ้อนจึงเป็นพื้นฐานสำคัญสำหรับการศึกษาด้านวิทยาศาสตร์และวิศวกรรมศาสตร์ขั้นสูง



”

ความรู้ก่อนหน้า

- จำนวนจริง
- เรขาคณิตวิเคราะห์
- ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ipst.me/8448

1.1 จำนวนเชิงซ้อน

จากที่ทราบมาแล้วว่า สมการพหุนาม $x^2+1=0$ ไม่มีจำนวนจริงใดเป็นคำตอบของสมการ แต่นักคณิตศาสตร์ต้องการสร้างระบบจำนวนซึ่งขยายออกไป เพื่อให้สมการพหุนามทั้งหมดมีคำตอบในระบบจำนวนที่สร้างขึ้นใหม่ ซึ่งเซตของจำนวนในระบบใหม่นี้ต้องเป็นเซตที่มีเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซต

บทนิยาม 1

จำนวนเชิงซ้อน (complex number) คือ คู่อันดับ (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดการเท่ากัน การบวก และการคูณของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้
สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d)

1. การเท่ากัน
   $(a, b)=(c, d)$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$
2. การบวก
   $(a, b)+(c, d)=(a+c, b+d)$
3. การคูณ
   $(a, b)\cdot(c, d)=(ac-bd, ad+bc)$

อาจเขียนแทน $(a, b)\cdot(c, d)$ ด้วย $(a, b)(c, d)$ และเขียนแทนเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดด้วยสัญลักษณ์ $\mathbb{C}$

ตัวอย่างที่ 1

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $(-1, 2)$ และ $(3, -4)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(-1, 2)+(3, -4) &= (-1+3, 2+(-4)) \\ &= (2, -2) \\ (-1, 2)(3, -4) &= ((-1)3-2(-4), (-1)(-4)+2(3)) \\ &= (-3+8, 4+6) \\ &= (5, 10)\end{aligned}$$

■

เมื่อพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในรูป $(x, 0)$ จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}(a, 0)+(b, 0) &= (a+b, 0) \\ (a, 0)(b, 0) &= (ab-0, a(0)+0(b)) = (ab, 0)\end{aligned}$$

ซึ่งจะเทียบได้กับการบวกและการคูณของจำนวนจริง ดังนั้น สามารถพิจารณาจำนวนเชิงซ้อนในรูป $(a, 0)$ ว่าเป็นจำนวนจริง a จะได้ว่าเซตของจำนวนจริงเป็นสับเซตของเซตของจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อพิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ จะเห็นว่า

$$(0, 1)(0, 1) = (0-1, 0+0) = (-1, 0)$$

ซึ่งจำนวนเชิงซ้อน $(-1, 0)$ คือ จำนวนจริง -1 นั่นเอง

เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$ ด้วยสัญลักษณ์ i จะได้ว่า

$$i^2 = -1$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ใด ๆ

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0)+(0, b) \\ &= (a, 0)+(b, 0)(0, 1) \\ &= a+bi\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน (a, b) สามารถเขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $a+bi$

บทนิยาม 2

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z=(a, b)$ หรือ $z=a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
เรียก a ว่า **ส่วนจริง (real part)** ของ z และเขียนแทนด้วย $\operatorname{Re}(z)$
เรียก b ว่า **ส่วนจินตภาพ (imaginary part)** ของ z และเขียนแทนด้วย $\operatorname{Im}(z)$

จากบทนิยาม 2 อาจกล่าวได้ว่า จำนวนจริงก็คือจำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จำนวนเชิงซ้อนที่มีส่วนจริงเป็นศูนย์แต่ส่วนจินตภาพไม่เป็นศูนย์ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้ (purely imaginary number)** เช่น $(0, 2)$ หรือ $2i$

เมื่อเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) และ (c, d) ในบทนิยาม 1 ด้วย $a+bi$ และ $c+di$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$a+bi=c+di$ ก็ต่อเมื่อ $a=c$ และ $b=d$

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$$

การกำหนดสัญลักษณ์ของจำนวนเชิงซ้อนในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ทำให้การคำนวณเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนสามารถทำได้ง่าย โดยใช้สมบัติต่าง ๆ เกี่ยวกับการบวกและการคูณเช่นเดียวกับสมบัติของการบวกและการคูณของจำนวนจริง โดยที่ $i^2=-1$ เช่น

$$\begin{aligned}(a+bi)+(c+di) &= (a+c)+(bi+di)\\ &= (a+c)+(b+d)i\\ (a+bi)(c+di) &= a(c+di)+bi(c+di)\\ &= ac+adi+bci+bdi^2\\ &= (ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

ต่อไปเมื่อกล่าวว่า $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะถือว่า a และ b เป็นจำนวนจริงโดยไม่ต้องกล่าวซ้ำอีก และเขียนแทน $a+(-b)i$ ด้วย $a-bi$ และเมื่อส่วนจินตภาพเป็นศูนย์ จะเขียนแทน $a+0i$ ด้วยจำนวนจริง a

ตัวอย่างที่ 2

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $3+2i$ และ $1-i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(3+2i)+(1-i) &= (3+1)+(2-1)i \\ &= 4+i \\ (3+2i)(1-i) &= 3(1-i)+2i(1-i) \\ &= 3-3i+2i-2i^2 \\ &= (3+2)+(-3+2)i \\ &= 5-i\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 3

จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อน $2(1+3i)$ และ $i(2+4i)$

วิธีทำ เนื่องจาก $2(1+3i)=2+6i$ และ $i(2+4i)=2i+4i^2=-4+2i$

จะได้

$$\begin{aligned}2(1+3i)+i(2+4i) &= (2+6i)+(-4+2i) \\ &= (2-4)+(6+2)i \\ &= -2+8i\end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned}\big(2(1+3i)\big)\big(i(2+4i)\big) &= (2+6i)(-4+2i) \\ &= 2(-4+2i)+6i(-4+2i) \\ &= -8+4i-24i+12i^2 \\ &= (-8-12)+(4-24)i \\ &= -20-20i\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 4

จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $(a+2i)+(-1+2bi)=3+8i$

วิธีทำ เนื่องจาก $(a+2i)+(-1+2bi)=(a-1)+(2+2b)i$

จะได้ $a-1 = 3$ และ $2+2b = 8$

ดังนั้น $a = 4$ และ $b = 3$ ■

ข้อสังเกต กำหนด $i^0=1$ จะได้ว่า $i^{4m}=1, i^{4m+1}=i, i^{4m+2}=-1, i^{4m+3}=-i$ เมื่อ $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $2+3i$
   2) $-4+5i$
   3) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$
   4) -4
   5) $3i$
   6) $\sqrt{2}-2\sqrt{2}i$

2. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $(-1,-2)$ และ $(2,1)$
   2) $(-2,2)$ และ $(2,-2)$
   3) $(-2,3)$ และ $(1,4)$
   4) $\left(3,\frac{1}{2}\right)$ และ $\left(4,\frac{2}{3}\right)$

3. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
   1) $(2-3i)+(4-5i)$
   2) $(5+4i)+3(2i-7)$
   3) $(2-\sqrt{2}i)+(5-\sqrt{8}i)$
   4) $i(2-i)$
   5) $\sqrt{2}i(i-\sqrt{2})$
   6) $i^2(3-4i)$
   7) $(-1-i)^2$
   8) $(3+2i)(2+4i)$
   9) $(\sqrt{2}-\sqrt{3}i)(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)$
   10) $(5-2i)(-2+3i)$

4. จงหาจำนวนจริง a และ b ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2a-3bi=4+6i$
2) $2a+bi=10$
3) $3a+(a-b)i=6+i$
4) $a+b-2abi=5-12i$
5) $(a+bi)(2+5i)=3-i$

5. จงหา

1) $(1-i)^3$
2) $(2+i)^4-(2-i)^4$
3) $(1+i)^3-(1-i)^3$
4) $(-i)^5(2+2i)^4$

1.2 สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน

เช่นเดียวกับระบบจำนวนจริง ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติบางประการที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณด้วย เช่น การมีเอกลักษณ์ การมีตัวผกผัน นอกจากนี้ยังสามารถนิยามการลบและการหารระหว่างจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วย

เอกลักษณ์และตัวผกผันการบวก

พิจารณาการบวกจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$(a,\, b)+(0,\, 0)=(a+0,\, b+0)=(a,\, b)$$

ทำนองเดียวกัน $(0,\, 0)+(a,\, b)=(a,\, b)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $(0,\, 0)$ เป็น **เอกลักษณ์การบวก** ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

เขียนแทนจำนวนเชิงซ้อน $(0,\, 0)$ หรือ $0+0i$ ด้วย 0

ดังนั้น $(a+bi)+0=0+(a+bi)=a+bi$

ในระบบจำนวนจริง ตัวผกผันการบวกของจำนวนจริง คือ จำนวนที่นำมาบวกกับจำนวนจริงนั้นแล้วได้เอกลักษณ์การบวก ในระบบจำนวนเชิงซ้อน ตัวผกผันการบวกของจำนวนเชิงซ้อนก็มีความหมายเดียวกัน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วตัวผกผันการบวกของ (a, b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่บวกกับ (a, b) แล้วได้ $(0, 0)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

เนื่องจาก $-a$ และ $-b$ เป็นตัวผกผันการบวกของ a และ b ตามลำดับ
ดังนั้น $(a, b)+(-a,-b)=(a-a, b-b)=(0, 0)$
และ $(-a, -b)+(a, b)=(-a+a, -b+b)=(0, 0)$
จะได้ว่า $(-a, -b)$ เป็นตัวผกผันการบวกของ (a, b)
หรือ $-a-bi$ เป็นตัวผกผันการบวกของ $a+bi$

ตัวผกผันการบวก ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $-z$
ดังนั้น $-(a+bi)=-a-bi$

ตัวอย่างเช่น ตัวผกผันการบวกของ $(-2, 1)$ คือ $(2, -1)$
ตัวผกผันการบวกของ $3+2i$ คือ $-3-2i$
ตัวผกผันการบวกของ $1-i$ คือ $-1+i$

การลบจำนวนเชิงซ้อน

เช่นเดียวกับระบบจำนวนจริง จะนิยามการลบกันของจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

บทนิยาม 3

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w จะได้ว่า $z-w=z+(-w)$

ตัวอย่างที่ 5

จงหา $(2-3i)-(4-i)$

วิธีทำ $$\begin{aligned}(2-3i)-(4-i) &= (2-3i)+(-(4-i)) \\ &= (2-4)+(-3+1)i \\ &= -2-2i\end{aligned}$$

■

เอกลักษณ์และตัวผกผันการคูณ

พิจารณาการคูณจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

$$\begin{aligned}(a, b)(1, 0) &= (a\cdot 1-b\cdot 0,\ a\cdot 0+b\cdot 1) \\ &= (a-0,\ 0+b) \\ &= (a, b)\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน $(1, 0)(a, b) = (a, b)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $(1, 0)$ หรือ 1 เป็น **เอกลักษณ์การคูณ** ในระบบจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า (a, b) เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งไม่เท่ากับ $(0, 0)$ แล้วตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ จำนวนเชิงซ้อนที่คูณกับ (a, b) แล้วได้ $(1, 0)$ ซึ่งหาได้ดังนี้

ให้ (x, y) เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b)

จะได้ $(a, b)(x, y) = (1, 0)$

แต่ $(a, b)(x, y) = (ax-by,\ ay+bx)$

ดังนั้น $(ax-by,\ ay+bx) = (1, 0)$

จากบทนิยามการเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน จะได้ $ax - by = 1$ และ $ay + bx = 0$

โดยการแก้ระบบสมการ จะได้ $x = \frac{a}{a^2 + b^2}$ และ $y = -\frac{b}{a^2 + b^2}$

ดังนั้น $(x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$

ตรวจสอบว่า $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ เป็นตัวผกผันการคูณของ (a, b) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
(a, b)\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) &= \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}, \frac{ab}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}\right) \\
&= \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, 0\right) \\
&= (1, 0)
\end{aligned}$$

และสามารถแสดงได้ว่า $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)(a, b) = (1, 0)$

ดังนั้น ตัวผกผันการคูณของ (a, b) คือ $\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$ เมื่อ $(a, b) \neq (0, 0)$

ตัวผกผันการคูณ ของจำนวนเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย z^{-1}
เมื่อ $z = a + bi$ และ $z \neq 0$ จะได้ว่า $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$

ตัวอย่างเช่น ตัวผกผันการคูณของ $(4, -3)$ คือ $\left(\frac{4}{25}, \frac{3}{25}\right)$

ตัวผกผันการคูณของ $-3 + 2i$ คือ $-\frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$

การหารจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อกำหนดจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เท่ากับ $(0, 0)$ มาให้ จะหาตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนนี้ได้เสมอ ดังนั้น อาจนิยามการหารจำนวนเชิงซ้อน z ด้วย w เมื่อ $w \neq 0$ โดยใช้ตัวผกผันการคูณของจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นตัวหารได้ดังนี้

บทนิยาม 4

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z และ w ซึ่ง $w \neq 0$ จะได้ว่า $z \div w = zw^{-1}$ และเขียนแทน $z \div w$ ด้วย $\frac{z}{w}$

จากบทนิยาม ถ้า $z = a + bi$ และ $w = c + di$ ซึ่ง $w \neq 0$

แล้ว $\frac{z}{w} = zw^{-1} = (a+bi)\left(\frac{c}{c^2+d^2} - \frac{d}{c^2+d^2}i\right) = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$

ตัวอย่างที่ 6

จงหา $\frac{3+2i}{4+3i}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4+3i} &= (3+2i)\left(\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i\right) \\ &= \frac{12}{25} + \frac{6}{25} + \left(\frac{8}{25} - \frac{9}{25}\right)i \\ &= \frac{18}{25} - \frac{1}{25}i\end{aligned}$$

■

จากที่ได้กล่าวมาแล้ว ระบบจำนวนเชิงซ้อนสอดคล้องกับสมบัติที่เกี่ยวข้องกับการบวกและการคูณ ซึ่งเรียกว่าสมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อน สามารถสรุปได้ดังนี้

ให้ z, z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

สมบัติ	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	1. $z_1 + z_2 \in \mathbb{C}$	6. $z_1 z_2 \in \mathbb{C}$
สมบัติการสลับที่	2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$	7. $z_1 z_2 = z_2 z_1$
สมบัติการเปลี่ยนหมู่	3. $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$	8. $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	4. $z + 0 = z = 0 + z$ เรียก 0 ว่า เอกลักษณ์การบวก	9. $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ เรียก 1 ว่า เอกลักษณ์การคูณ
สมบัติการมีตัวผกผัน	5. $z + (-z) = 0 = (-z) + z$ เรียก $-z$ ว่า ตัวผกผันการบวกหรืออินเวอร์สการบวกของ z	10. ถ้า $z \neq 0$ แล้ว $z \cdot z^{-1} = 1 = z^{-1} \cdot z$ เรียก z^{-1} ว่า ตัวผกผันการคูณหรืออินเวอร์สการคูณของ z
สมบัติการแจกแจง	11. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$	

สมบัติเชิงพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนเป็นทฤษฎีบท ซึ่งได้แสดงการพิสูจน์บางสมบัติไว้บ้างแล้ว

สังยุคของจำนวนเชิงซ้อน

สังเกตว่า เมื่อคูณ $a+bi$ กับ $a-bi$ จะได้ a^2+b^2 ซึ่งเป็นจำนวนจริง จึงสามารถนำมาช่วยในการหาผลหารของจำนวนเชิงซ้อน ได้ดังนี้

ถ้า $z_1=a+bi$ และ $z_2=c+di\neq 0$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \left(\frac{a+bi}{c+di}\right)\left(\frac{c-di}{c-di}\right) = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

เช่น

$$\begin{aligned}\frac{3+2i}{4+3i} &= \left(\frac{3+2i}{4+3i}\right)\left(\frac{4-3i}{4-3i}\right)\\ &= \frac{\big(3(4)+(2)(3)\big)+\big(2(4)-(3)(3)\big)i}{4^2+3^2}\\ &= \frac{18}{25}-\frac{1}{25}i\end{aligned}$$

บทนิยาม 5

ให้ $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

สังยุค (conjugate) ของ z คือ $a-bi$

สังยุคของ z เขียนแทนด้วย $\overline{z}$ ซึ่ง $\overline{z}=\overline{a+bi}=a-bi$

ตัวอย่างที่ 7

จงหาผลหารของการหาร $2-i$ ด้วย $3+2i$ โดยใช้สังยุคของตัวหาร

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{2-i}{3+2i} &= \left(\frac{2-i}{3+2i}\right)\left(\frac{3-2i}{3-2i}\right)\\ &= \frac{(6-2)+(-3-4)i}{3^2+2^2}\\ &= \frac{4}{13}-\frac{7}{13}i\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 8

จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(2+3i)z=-1-2i$

วิธีทำ จาก $(2+3i)z = -1-2i$

จะได้
$$z = \frac{-1-2i}{2+3i}$$
$$= \left(\frac{-1-2i}{2+3i}\right)\left(\frac{2-3i}{2-3i}\right)$$
$$= \frac{(-2-6)+(3-4)i}{2^2+3^2}$$
$$= -\frac{8}{13}-\frac{1}{13}i$$

■

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับสังยุคของจำนวนเชิงซ้อน มีดังนี้

ทฤษฎีบท 1

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $\operatorname{Re}(z)=\frac{1}{2}(z+\overline{z})$ และ $\operatorname{Im}(z)=\frac{1}{2i}(z-\overline{z})$
2. $\overline{\overline{z}}=z$
3. $\frac{1}{\overline{z}}=\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ เมื่อ $z\neq 0$
4. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
5. $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
6. $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$
7. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2\neq 0$

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เพียงข้อ 1, 3, 4, 6 และ 7 ส่วนข้ออื่นจะละไว้เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์ ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a+bi, z_1 = a_1 + b_1 i$ และ $z_2 = a_2 + b_2 i$ เมื่อ a, b, a_1, b_1, a_2 และ b_2 เป็นจำนวนจริง

1. จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(z+\bar{z}) &= \frac{1}{2}((a+bi)+(a-bi)) \\ &= \frac{1}{2}(2a) \\ &= a \\ &= \operatorname{Re}(z) \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i}(z-\bar{z}) &= \frac{1}{2i}((a+bi)-(a-bi)) \\ &= \frac{1}{2i}(2bi) \\ &= b \\ &= \operatorname{Im}(z) \end{aligned}$$

ดังนั้น $\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$ และ $\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

3. สมมติ $z \neq 0$

ดังนั้น a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน และ $\bar{z} = a - bi$

พิจารณา $$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} = \left(\frac{1}{a+bi}\right)\left(\frac{a-bi}{a-bi}\right) = \frac{a-bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i$$

จะได้ $$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

และเนื่องจาก $$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-bi} = \left(\frac{1}{a-bi}\right)\left(\frac{a+bi}{a+bi}\right) = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$$

ดังนั้น $$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$$

4. พิจารณา $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i)$

$= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

จะได้ $\overline{z_1 + z_2} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$

$= (a_1 - b_1 i) + (a_2 - b_2 i)$

$= \overline{z_1} + \overline{z_2}$

ดังนั้น $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

6. พิจารณา $\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)}$

$= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i}$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

และ $\overline{z_1}\,\overline{z_2} = \overline{(a_1 + b_1 i)}\,\overline{(a_2 + b_2 i)}$

$= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i)$

$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) - (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$

ดังนั้น $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

7. สมมติ $z_2 \neq 0$

จะได้ $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{z_1 \cdot \frac{1}{z_2}}$

$= \overline{z_1}\,\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$ จากข้อ 6

$= \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}}$ จากข้อ 3

$= \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

ดังนั้น $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

ตัวอย่างที่ 9

กำหนดให้ $z_1 = 5+3i$ และ $z_2 = 4i$ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $\overline{\overline{z_1} + z_2}$ 2) $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)}$

วิธีทำ 1) $\overline{\overline{z_1} + z_2} = \overline{\overline{z_1}} + \overline{z_2} = z_1 + \overline{z_2} = 5+3i-4i = 5-i$

2) $\overline{\left(\dfrac{z_2}{z_1}\right)} = \dfrac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \dfrac{-4i}{5-3i} = \left(\dfrac{-4i}{5-3i}\right)\left(\dfrac{5+3i}{5+3i}\right) = \dfrac{12-20i}{34} = \dfrac{6}{17} - \dfrac{10}{17}i$ ■

ตัวอย่างที่ 10

จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(1+2i)z = 17-i$

วิธีทำ เนื่องจากตัวผกผันการคูณของ $1+2i$ คือ $\dfrac{1}{1^2+2^2} - \dfrac{2}{1^2+2^2}i = \dfrac{1}{5} - \dfrac{2}{5}i$

จะได้

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)(1+2i)z &= \left(\frac{1}{5}-\frac{2}{5}i\right)(17-i) \\
z &= \frac{17}{5} - \frac{1}{5}i - \frac{34}{5}i - \frac{2}{5} \\
&= 3-7i
\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการนี้ คือ $3-7i$ ■

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
   1) $(-8+3i)-2(3-2i)$
   2) $5(3+i)-i(1+i)$
   3) $-3(2-i)+i(2+i)$
   4) $-i(1+i)-3i(-3-2i)$
   5) $\frac{1}{2}(1+i)-\frac{3}{2}(3+2i)$
   6) $\sqrt{2}\left(\sqrt{18}-\sqrt{3}\,i\right)-2\sqrt{3}\,i\left(\sqrt{2}+\sqrt{12}\,i\right)$
   7) $(2+i)^2(1+i)-(1+i)(1-3i)^2$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
   1) $\frac{1}{2-3i}$
   2) $\frac{3+2i}{2-3i}$
   3) $\frac{4+3i}{1+i}$
   4) $\frac{2-2i}{4i}$
   5) $\frac{2-i}{4+i}$
   6) $\frac{i}{2+6i}$
   7) $\frac{(1-i)3i}{2+i}$
   8) $-4i(3+2i)+\frac{i}{1-i}$

3. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับแต่ละสมการต่อไปนี้
   1) $z(1+i)=4$
   2) $(2-i)z=4+2i$
   3) $(3-i)z=6-7i$
   4) $(1+3i)z=-2-i$
   5) $(1+3i)z=1+i$
   6) $(2+i)z+i=3$
   7) $(1+i)^2z=2z-1+3i$
   8) $\frac{z}{2+i}+i=3$

4. ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า
   1) $z_1z_2=z_2z_1$
   2) $z(z_1z_2)=(zz_1)z_2$
   3) $\overline{\overline{z}}=z$
   4) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

5. กำหนดให้ $z_1 = 2 - i$ และ $z_2 = -3 + 2i$ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $\overline{\overline{z_1}}$ 2) $\overline{z_1 - z_2}$ 3) $\overline{\overline{z_1} - z_2}$ 4) $z_1 + \overline{z_2}$

5) $\overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)}$ 6) $\frac{z_2}{\overline{\overline{z_1}}}$ 7) $\frac{1}{\overline{\overline{z_1} + z_2}}$ 8) $\left(\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_2}}\right)i$

6. กำหนดให้ $z = 2 - 4i$ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $z\overline{z}$ 2) $\frac{1}{2}(z + \overline{z})$ 3) $\frac{1}{i}(\overline{z} - z)$ 4) $z(z + \overline{z})$

5) $\frac{\overline{z}}{z}$ 6) $\left(\overline{z} - \overline{\overline{z}}\right)i$ 7) $(1 - \overline{z})z^{-1}$ 8) $\overline{\left(\frac{z-2}{i+1}\right)}$

7. จงแสดงว่า ถ้า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 z_2 = 0$ แล้ว $z_1 = 0$ หรือ $z_2 = 0$

1.3 รากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน

ในหัวข้อนี้จะแสดงการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และหาคำตอบของสมการกำลังสองที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 6

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ รากที่สองของ z คือ จำนวนเชิงซ้อน w ซึ่ง $w^2 = z$

ถ้า w เป็นรากที่สองของ z แล้ว $-w$ จะเป็นรากที่สองของ z ด้วย และรากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์จะมีเพียงสองจำนวนเท่านั้น

ต่อไปนี้จะแสดงวิธีหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

ให้ $z=a+bi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์พร้อมกัน และให้ $w=x+yi$ เป็นรากที่สองของ z โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $z=w^2=(x+yi)^2=(x^2-y^2)+2xyi$

จะได้ $x^2-y^2 = a$ -------(1)

และ $2xy = b$ -------(2)

เนื่องจาก
$$\begin{aligned}(x^2+y^2)^2 &= x^4+2x^2y^2+y^4\\ &= (x^4-2x^2y^2+y^4)+4x^2y^2\\ &= (x^2-y^2)^2+(2xy)^2\\ &= a^2+b^2\end{aligned}$$

จะได้ $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ -------(3)

จากสมการ (1) และ (3) จะได้

$$x^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \quad \text{และ} \quad y^2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$$

ดังนั้น $x=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}$ และ $y=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}$

จากสมการ (2) ซึ่งคือ $2xy=b$ แสดงว่าจะต้องเลือก x และ y ที่ทำให้ xy เป็นจำนวนจริงบวกหรือจำนวนจริงลบเหมือนกับ b ดังนั้น จึงเลือก x และ y ดังนี้

ถ้า $b\geq 0$ รากที่สองของ z คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i \quad \text{และ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i$$

ถ้า $b<0$ รากที่สองของ z คือ

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i \quad \text{และ} \quad -\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\,i$$

สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 2

กำหนดจำนวนเชิงซ้อน $z = a + bi$ และให้ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ว่ารากที่สองของ z คือ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} + \sqrt{\frac{r-a}{2}}\,i\right) \quad \text{เมื่อ} \quad b \geq 0$$

$$\pm\left(\sqrt{\frac{r+a}{2}} - \sqrt{\frac{r-a}{2}}\,i\right) \quad \text{เมื่อ} \quad b < 0$$

ตัวอย่างที่ 11

จงหารากที่สองของ $-7 - 24i$

วิธีทำ ให้ $z = -7 - 24i$ เมื่อเทียบกับ $a + bi$ ในทฤษฎีบท 2 จะได้ $a = -7, b = -24$

และ $r = \sqrt{(-7)^2 + (-24)^2} = 25$

เนื่องจาก $b < 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $-7 - 24i$ คือ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{25+(-7)}{2}} - \sqrt{\frac{25-(-7)}{2}}\,i\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{18}{2}} - \sqrt{\frac{32}{2}}\,i\right) = \pm(3 - 4i)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $-7 - 24i$ คือ $3 - 4i$ และ $-3 + 4i$ ■

ตัวอย่างที่ 12

จงหารากที่สองของ $-4+3i$

วิธีทำ ให้ $z=-4+3i$ เมื่อเทียบกับ $a+bi$ ในทฤษฎีบท 2 จะได้ $a=-4, b=3$

และ $r=\sqrt{(-4)^2+3^2}=5$

เนื่องจาก $b\geq 0$ จะได้ว่ารากที่สองของ $-4+3i$ คือ

$$\pm\left(\sqrt{\frac{5+(-4)}{2}}+\sqrt{\frac{5-(-4)}{2}}i\right) = \pm\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt{\frac{9}{2}}i\right) = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$$

ดังนั้น รากที่สองของ $-4+3i$ คือ $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ และ $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i$ ■

ในกรณีที่จำนวนเชิงซ้อนเป็นจำนวนจริงลบ การหารากที่สองสามารถทำได้โดยง่ายดังนี้

ให้ $z=-x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงบวก จากทฤษฎีบท 2 จะได้ว่ารากที่สองของ z คือ $\sqrt{x}\,i$ และ $-\sqrt{x}\,i$

เช่น รากที่สองของ -9 คือ $3i$ และ $-3i$

รากที่สองของ -5 คือ $\sqrt{5}\,i$ และ $-\sqrt{5}\,i$

ความรู้เรื่องรากที่สองของจำนวนจริงลบสามารถนำไปใช้หาคำตอบของสมการกำลังสองได้ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3

ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a\neq 0$ จะได้ว่าคำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2+bx+c=0$ คือ

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{เมื่อ } b^2-4ac\geq 0$$

และ

$$\frac{-b\pm\sqrt{\left|b^2-4ac\right|}\,i}{2a} \quad \text{เมื่อ } b^2-4ac<0$$

พิสูจน์ จาก $ax^2+bx+c=0$ โดยที่ $a \neq 0$

จะได้

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right) = 0$$

กรณี $b^2-4ac \geq 0$

จะได้

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$$

$$\left(x+\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)\left(x+\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right) = 0$$

ดังนั้น $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

กรณี $b^2-4ac<0$

จะได้

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\left(4ac-b^2\right)(-1)}{4a^2} = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right)^2 = 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}i\right) = 0$$

ดังนั้น $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$ นั่นคือ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\left|b^2-4ac\right|}\,i}{2a}$

ดังนั้น คำตอบของสมการกำลังสอง $ax^2+bx+c=0$ เมื่อ a, b และ c

เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ คือ $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ เมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$

และ $\frac{-b \pm \sqrt{\left|b^2 - 4ac\right|}\,i}{2a}$ เมื่อ $b^2 - 4ac < 0$

ตัวอย่างที่ 13

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^2 - 3x + 6 = 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $(-3)^2 - (4)(2)(6) = -39$ ซึ่ง $-39 < 0$

จะได้ว่าคำตอบของสมการนี้ คือ $\frac{3 \pm \sqrt{|-39|}\,i}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{39}\,i}{4}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\left\{\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{39}}{4}i, \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{39}}{4}i\right\}$ ■

ตัวอย่างที่ 14

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^6 - 1 = 0$

วิธีทำ จาก $x^6 - 1 = 0$

จะได้ $(x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$

$(x + 1)(x^2 - x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

ดังนั้น $x = -1$ หรือ $x = 1$ หรือ $x^2 - x + 1 = 0$ หรือ $x^2 + x + 1 = 0$

จาก $x^2 - x + 1 = 0$ จะได้ $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

และจาก $x^2 + x + 1 = 0$ จะได้ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ

$$\left\{-1, 1, \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{1 - \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right\}$$ ■

แบบฝึกหัด 1.3

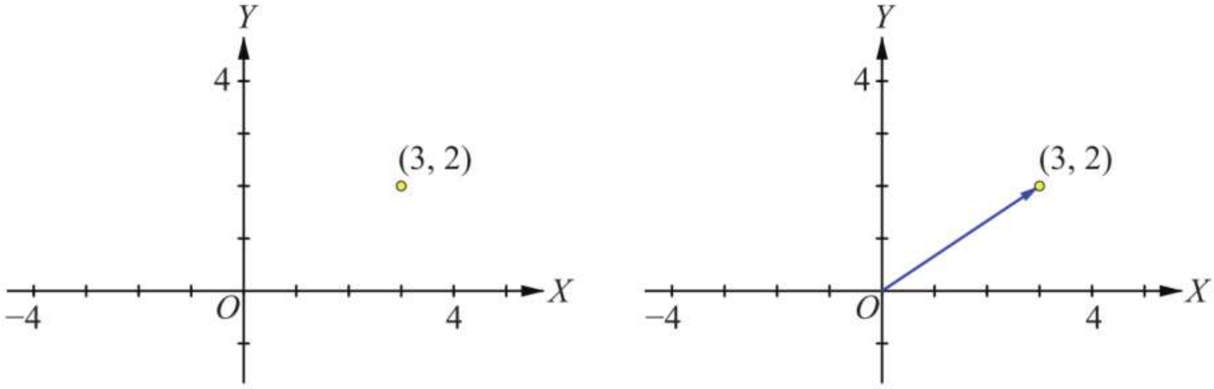
1. จงหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $-16i$
   2) $5+12i$
   3) $3+4i$
   4) $8-6i$
   5) $1-2\sqrt{2}i$

2. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $x^2+48=0$
   2) $2x^2+2x+25=0$
   3) $2x^2+5x+12=0$
   4) $2x^2-2x+1=0$
   5) $x^2-2x-1=0$
   6) $x^2-4x+5=0$
   7) $x^2+x+6=0$
   8) $3x^2+5x-16=0$
   9) $2x^2+2x+4=0$
   10) $(x+1)^2+49=0$
   11) $x^4-16=0$
   12) $x^4+2x^2-24=0$
   13) $x^6+7x^3-8=0$
   14) $x^5+2x^4-8x^2-16x=0$

1.4 กราฟและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

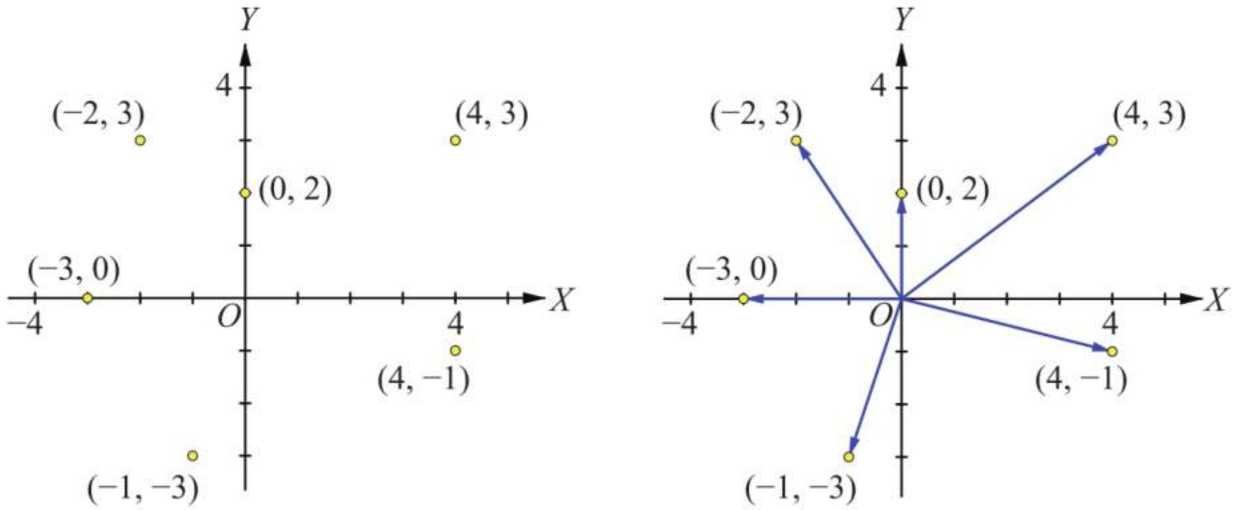
เนื่องจากจำนวนเชิงซ้อนเขียนอยู่ในรูปของคู่อันดับ (a, b) หรือในรูป $a+bi$ โดยที่ a เป็นส่วนจริง และ b เป็นส่วนจินตภาพ ดังนั้น อาจแทนจำนวนเชิงซ้อน (a, b) ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบได้เช่นเดียวกับการแทนคู่อันดับในความสัมพันธ์ใด ๆ ด้วยจุดในระนาบในระบบพิกัดฉาก และเรียกแกน X ว่า **แกนจริง (real axis)** เรียกแกน Y ว่า **แกนจินตภาพ (imaginary axis)** และเรียกระนาบนี้ว่า **ระนาบเชิงซ้อน (complex plane)**

ตัวอย่างเช่น จำนวนเชิงซ้อน $3+2i$ แทนได้ด้วยจุด $(3, 2)$ หรือแทนด้วยเวกเตอร์ที่มีจุด $(0, 0)$ เป็นจุดเริ่มต้น และจุด $(3, 2)$ เป็นจุดสิ้นสุด ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1

ส่วนจำนวนเชิงซ้อน $-3, 2i, 4+3i, 4-i, -2+3i$ และ $-1-3i$ แทนได้ด้วยจุดและเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อน ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2

บทนิยาม 7

ค่าสัมบูรณ์ (absolute value or modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ คือ จำนวนจริง $\sqrt{a^2+b^2}$ นั่นคือ $|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$

จากบทนิยาม จะเห็นว่าค่าสัมบูรณ์ของ $a+bi$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0,0)$ และ (a,b)

ตัวอย่างเช่น ค่าสัมบูรณ์ของ $3+2i$ คือ $|3+2i| = \sqrt{3^2+2^2} = \sqrt{13}$

ค่าสัมบูรณ์ของ $-3i$ คือ $|-3i| = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3$

ค่าสัมบูรณ์ของ -4 คือ $|-4| = \sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$

ค่าสัมบูรณ์ของ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$ คือ $\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน มีดังนี้

ทฤษฎีบท 4

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้ว่า

1. $|z|^2 = z\overline{z}$
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
3. $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ เมื่อ $z \neq 0$
4. $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$
5. $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$
6. $|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$

ในที่นี้จะแสดงการพิสูจน์เพียงข้อ 1, 2, 4 และ 5

พิสูจน์ ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $z = a + bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1. จะได้
$$\begin{aligned} z\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

2. จะได้
$$\begin{aligned} |-z| &= |-a-bi| \\ &= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้
$$\begin{aligned} |\overline{z}| &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$

ดังนั้น $|z| = |-z| = |\overline{z}|$

4. พิจารณา
$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} && \text{จากข้อ 1} \\ &= z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} && \text{จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 6} \\ &= z_1 \overline{z_1}\, z_2 \overline{z_2} && \text{จากสมบัติการสลับที่} \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 && \text{จากข้อ 1} \end{aligned}$$

ดังนั้น $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

5. พิจารณา
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} && \text{จากข้อ 1} \\ &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) && \text{จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 4} \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} && \text{จากสมบัติการแจกแจง} \\ &= |z_1|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1\overline{z_2}} + |z_2|^2 && \text{จากข้อ 1 สมบัติการสลับที่ และทฤษฎีบท 1 ข้อ 2} \\ &= |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2 && \text{จากทฤษฎีบท 1 ข้อ 1} \end{aligned}$$

เนื่องจากสำหรับจำนวนเชิงซ้อน w ใด ๆ จะได้ว่า

$\mathrm{Re}(w) \le \sqrt{(\mathrm{Re}(w))^2 + (\mathrm{Im}(w))^2}$ นั่นคือ $\mathrm{Re}(w) \le |w|$

ดังนั้น $2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1\overline{z_2}|$ และ $2|z_1\overline{z_2}| = 2|z_1||\overline{z_2}| = 2|z_1||z_2|$

จะได้ $2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \le 2|z_1||z_2|$

นั่นคือ $|z_1+z_2|^2 \le |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$

และเนื่องจาก $|z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$

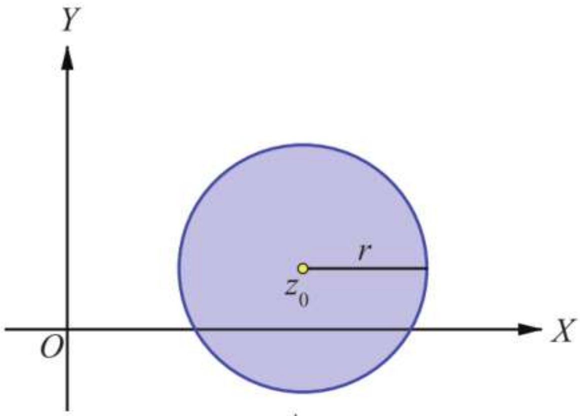
ดังนั้น $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ถ้า $z_1 = a+bi$ และ $z_2 = c+di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้วค่าสัมบูรณ์ของ $z_1 - z_2$ หรือ $|z_1 - z_2|$ หมายถึง ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ในระนาบเชิงซ้อน

นอกจากนี้ เมื่อพิจารณา $z_1 - z_2 = (a-c)+(b-d)i$ จะได้ $|z_1 - z_2| = \sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$

สังเกตว่า $\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$ คือ ระยะทางระหว่างจุด (a, b) และ (c, d) ในระบบพิกัดฉาก ซึ่งแสดงว่า $|z_1 - z_2|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด z_1 และ z_2 ในระนาบเชิงซ้อน

ตัวอย่างเช่น ถ้า z_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ r เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| \le r\}$ คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจาก z_0 น้อยกว่าหรือเท่ากับ r ซึ่งก็คือ เซตของจุดทั้งหมดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายในวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ z_0 และรัศมียาว r หน่วย ดังรูป



รูปที่ 3

ตัวอย่างที่ 15

จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z| \geq 3$ และอสมการ $|z-2| < 2$

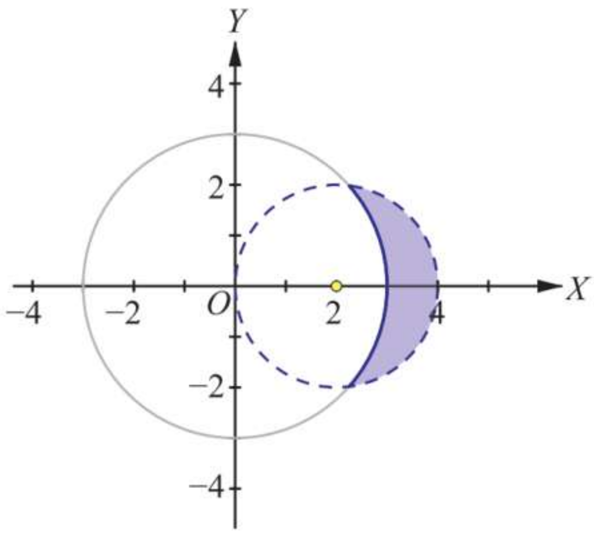
วิธีทำ เนื่องจาก $|z| = |z-0|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(0, 0)$ และ z

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z| \geq 3$ คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(0, 0)$ มากกว่าหรือเท่ากับ 3 หน่วย ซึ่งก็คือ เซตของจุดที่อยู่บนเส้นรอบวงและอยู่ภายนอกวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ และรัศมียาว 3 หน่วย

ในทำนองเดียวกัน $|z-2|$ คือ ระยะทางระหว่างจุด $(2, 0)$ และ z

ดังนั้น เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับอสมการ $|z-2| < 2$ คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด $(2, 0)$ น้อยกว่า 2 หน่วย ซึ่งก็คือ เซตของจุดที่อยู่ภายในวงกลม (ไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 0)$ และรัศมียาว 2 หน่วย

จะได้ กราฟของจุดทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับอสมการทั้งสองแสดงเป็นส่วนแรเงา ดังรูป

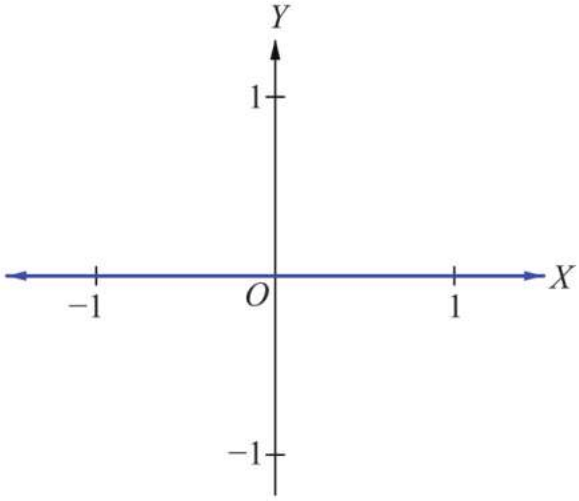


■

ตัวอย่างที่ 16

จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z+i| = |z-i|$

วิธีทำ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z+i| = |z-i|$ คือ กราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่มีระยะห่างจากจุด i เท่ากับระยะห่างจากจุด $-i$ ซึ่งก็คือแกนจริง ดังรูป



■

ตัวอย่างที่ 17

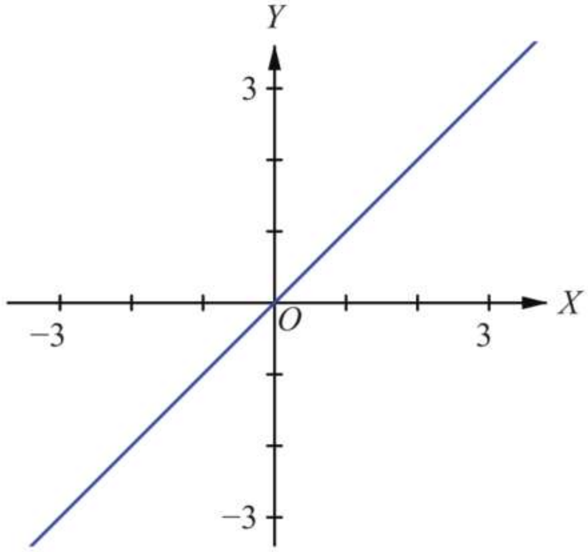
จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $|z-i| = |z-1|$

วิธีทำ ให้จำนวนเชิงซ้อน z แทนด้วยจุด (a, b)

จาก $|z-i| = |z-1|$

จะได้
$$\begin{aligned} \sqrt{a^2+(b-1)^2} &= \sqrt{(a-1)^2+b^2} \\ a^2+b^2-2b+1 &= a^2-2a+1+b^2 \\ a &= b \end{aligned}$$

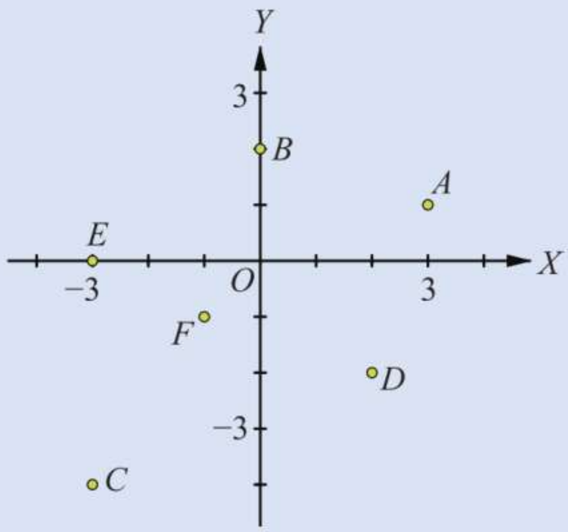
ดังนั้น เขียนกราฟของจุดทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่ $a = b$ ได้ดังนี้



แบบฝึกหัด 1.4

1. จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน
   1) $(2, 3), (-3, 1), (-2, -3), (4, 2), (0, -1), (-2, 0)$
   2) $3-4i, -5-2i, -3, -2i, 4+i, -4+i$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนที่แสดงด้วยจุด A, B, C, D, E และ F ในระนาบเชิงซ้อน ดังรูป



3. ถ้า $z_1 = 6-5i$ และ $z_2 = -3+4i$ แล้ว จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน
   1) $z_1 + z_2$
   2) $z_1 - z_2$

4. ถ้า $z = 1+3i$ แล้ว จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน
   1) z
   2) $\overline{z}$
   3) z^2
   4) $-z$
   5) $\frac{1}{z}$
   6) $z\overline{z}$

5. ถ้า $z = 2-5i$ แล้ว จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน
   1) z
   2) zi
   3) zi^2
   4) zi^3
   5) zi^4

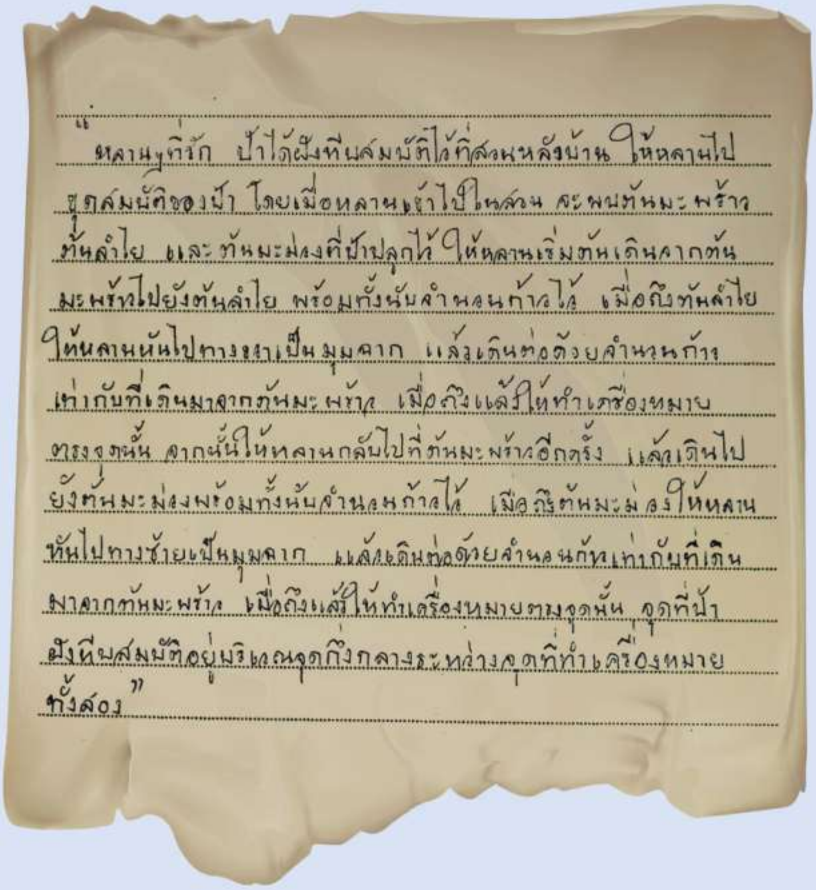
6. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้
   1) $4i$
   2) $\sqrt{2}-3i$
   3) $-\sqrt{3}-i$
   4) $\sqrt{5}+2\sqrt{3}i$
   5) $-3-4i$
   6) $-5+12i$

7. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า $|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$

8. จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการหรืออสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) $\mathrm{Re}(z) < 2$
   2) $\mathrm{Im}(z) > 3$
   3) $|z-2| \le 1$
   4) $|z+i| \ge 1$
   5) $|z-2+3i| < 3$
   6) $\mathrm{Im}(i+\overline{z}) = 4$
   7) $|z+2| = |z-2|$
   8) $|z-3i| = |z+i|$
   9) $|z+2i| = |z-3|$
   10) $|z-(2+i)| = |z+(2+3i)|$

กิจกรรม : หีบสมบัติของป้าบุญมา

หลังจากป้าบุญมาเสียชีวิต หลาน ๆ ได้ช่วยกันเก็บของที่บ้านของป้าบุญมา และบังเอิญพบบันทึกที่ป้าบุญมาเขียนไว้ มีเนื้อความดังนี้


"หลาน ๆ ที่รัก ป้าได้ฝังหีบสมบัติไว้ที่สวนหลังบ้าน ให้หลานไป
ขุดสมบัติของป้า โดยเมื่อหลานเข้าไปในสวน จะพบต้นมะพร้าว
ต้นลำไย และต้นมะม่วงที่ป้าปลูกไว้ ให้หลานเริ่มต้นเดินจากต้น
มะพร้าวไปยังต้นลำไย พร้อมทั้งนับจำนวนก้าวไว้ เมื่อถึงต้นลำไย
ให้หลานหันไปทางขวาเป็นมุมฉาก แล้วเดินต่อด้วยจำนวนก้าว
เท่ากับที่เดินมาจากต้นมะพร้าว เมื่อถึงแล้วให้ทำเครื่องหมาย
ตรงจุดนั้น จากนั้นให้หลานกลับไปที่ต้นมะพร้าวอีกครั้ง แล้วเดินไป
ยังต้นมะม่วงพร้อมทั้งนับจำนวนก้าวไว้ เมื่อถึงต้นมะม่วงให้หลาน
หันไปทางซ้ายเป็นมุมฉาก แล้วเดินต่อด้วยจำนวนก้าวเท่ากับที่เดิน
มาจากต้นมะพร้าว เมื่อถึงแล้วให้ทำเครื่องหมายตรงจุดนั้น จุดที่ป้า
ฝังหีบสมบัติอยู่บริเวณจุดกึ่งกลางระหว่างจุดที่ทำเครื่องหมาย
ทั้งสอง"

หลังจากที่หลาน ๆ ของป้าบุญมาพบบันทึกนี้ จึงได้พากันไปที่สวนหลังบ้าน เพื่อขุดหาหีบสมบัติที่ป้าบุญมาฝังไว้ แต่เมื่อหลาน ๆ ของป้าบุญมาไปถึงสวน กลับพบเพียงต้นลำไยและต้นมะม่วง ไม่ว่าจะช่วยกันหาเท่าไร ก็ไม่พบต้นมะพร้าว ที่เป็นเช่นนี้ก็เพราะว่าต้นมะพร้าวได้ตายลงหลายปีก่อนและถูกขุดทิ้งจนไร้ร่องรอย

ถ้านักเรียนเป็นหลานของป้าบุญมา นักเรียนจะมีวิธีการหาหีบสมบัติของป้าบุญมาได้อย่างไร

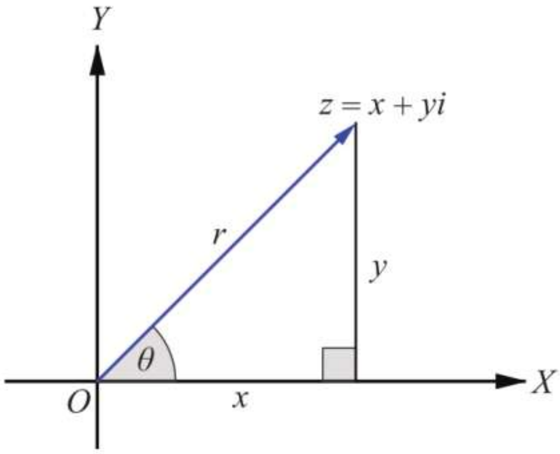
ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. เขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน $1, 1\cdot i, 1\cdot i\cdot i, 1\cdot i\cdot i\cdot i$ และ $1\cdot i\cdot i\cdot i\cdot i$ ในระนาบเชิงซ้อน
2. จากกราฟที่ได้ในข้อ 1 นักเรียนคิดว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย i สามารถพิจารณาเป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้อย่างไร
3. นักเรียนคิดว่าการคูณจำนวนเชิงซ้อนด้วย $-i$ สามารถพิจารณาเป็นการหมุนจุดที่แสดงจำนวนเชิงซ้อนนั้นได้อย่างไร
4. ให้นักเรียนนำลายแทงหีบสมบัติของป้าบุญมา มาเขียนลงในระนาบเชิงซ้อน โดยให้ c แทนระยะห่างระหว่างต้นลำไยและต้นมะม่วง กำหนดจุด $R(a, b)$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 แทนตำแหน่งต้นมะพร้าว ให้ $d = \frac{c}{2}$ กำหนดจุด $P(-d, 0)$ และ $Q(d, 0)$ แทนตำแหน่งต้นลำไยและต้นมะม่วง ตามลำดับ และให้จุด M_1 และ M_2 แทนตำแหน่งที่ทำเครื่องหมาย เมื่อเดินไปจากต้นลำไยและต้นมะม่วง ตามลำดับ
5. ให้ R', P' และ Q' เป็นจุดที่ได้จากการเลื่อนจุด R, P และ Q ไปทางขวาเป็นระยะทาง d หน่วย ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด R', P' และ Q' พร้อมทั้งเขียนกราฟที่ได้จากการเลื่อนจุดทุกจุดบนกราฟที่ได้ในข้อ 4 ไปทางขวาเป็นระยะทาง d หน่วย
6. จากกราฟที่ได้ในข้อ 5 จุด M_1' ได้จากการหมุนจุด R' รอบจุดกำเนิดเป็นมุมเท่าใดในทิศทางใด
7. จากข้อ 6 จำนวนเชิงซ้อน M_1' ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R' ด้วยจำนวนเชิงซ้อนใด และจงหาพิกัดของจุด M_1' และ M_1
8. ให้ R'', P'' และ Q'' เป็นจุดที่ได้จากการเลื่อนจุด R, P และ Q ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง d หน่วย ตามลำดับ จงหาพิกัดของจุด R'', P'' และ Q'' พร้อมทั้งเขียนกราฟที่ได้จากการเลื่อนจุดทุกจุดบนกราฟที่ได้ในข้อ 4 ไปทางซ้ายเป็นระยะทาง d หน่วย
9. จากกราฟที่ได้ในข้อ 8 จุด M_2'' ได้จากการหมุนจุด R'' รอบจุดกำเนิดเป็นมุมเท่าใดในทิศทางใด
10. จากข้อ 9 จำนวนเชิงซ้อน M_2'' ได้จากการคูณจำนวนเชิงซ้อน R'' ด้วยจำนวนเชิงซ้อนใด และจงหาพิกัดของจุด M_2'' และ M_2

11. จงหาพิกัดของจุดที่ป้าบุญมาฝังหีบสมบัติไว้
12. จากข้อมูลในข้อ 11 นักเรียนจะมีวิธีการหาหีบสมบัติของป้าบุญมาได้อย่างไร ถึงแม้ว่าจะไม่ทราบตำแหน่งของต้นมะพร้าว
13. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/8452
14. จากแผนที่จำลองจุดที่ฝังหีบสมบัติของป้าบุญมาในเว็บไซต์ข้างต้น ให้นักเรียนลองสำรวจว่าจุดที่บอกตำแหน่งหีบสมบัติเปลี่ยนไปหรือไม่ เมื่อ
    1) เลื่อนจุดที่แทนต้นลำไย
    2) เลื่อนจุดที่แทนต้นมะม่วง
    3) เลื่อนจุดที่แทนต้นมะพร้าว
15. จากข้อ 14 ตำแหน่งของหีบสมบัติของป้าบุญมาขึ้นกับอะไรบ้าง

1.5 รูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $z = x + yi$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะสามารถเขียนแสดง z ด้วยเวกเตอร์ในระนาบเชิงซ้อนได้ดังนี้



รูปที่ 4

เมื่อกำหนดให้ r แทนระยะทางระหว่างจุดกำเนิด O กับ z และ θ เป็นขนาดของมุม ซึ่งถ้าวัดมุมทวนเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta > 0$ และถ้าวัดมุมตามเข็มนาฬิกาจากแกน X ทางด้านบวกไปยัง $\overrightarrow{Oz}$ จะได้ $\theta < 0$ และได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$x = r\cos\theta \quad \text{และ} \quad y = r\sin\theta$$

นอกจากนี้ยังได้ความสัมพันธ์ที่ทำให้หา r และ θ จาก x และ y ดังนี้

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{ และ } \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ \text{ เมื่อ } \ x \neq 0$$

ดังนั้น อาจเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ในรูปของ r และ θ ได้ดังนี้

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูป $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกว่า **รูปเชิงขั้ว (polar form)** ของ z และเรียก θ ว่า **อาร์กิวเมนต์ (argument)** ของ z

สังเกตว่า เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
เนื่องจาก $\cos(\theta + 2k\pi) = \cos\theta$ และ $\sin(\theta + 2k\pi) = \sin\theta$
ดังนั้น $\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi) = \cos\theta + i\sin\theta$
แสดงว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม k ถ้า θ เป็นอาร์กิวเมนต์ของจำนวนเชิงซ้อน z แล้ว $\theta + 2k\pi$ เป็นอาร์กิวเมนต์ของ z ด้วย

ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1 = z_2$ จะได้ว่า $|z_1| = |z_2|$ นั่นคือ $r_1 = r_2$ และเนื่องจาก $\cos\theta_1 = \cos\theta_2$ และ $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ ก็ต่อเมื่อ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 18

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1) $2+2i$
2) $\sqrt{3}-i$
3) $-1+\sqrt{3}i$
4) $-4-4\sqrt{3}i$

วิธีทำ 1) ให้ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $2+2i$

จะได้ $r=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

เนื่องจาก $\tan\theta=\frac{2}{2}=1$ และ $(2,2)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 1

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ $\tan\theta=1$ คือ $\frac{\pi}{4}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $2+2i$ คือ $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $2+2i$ คือ $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$

2) ให้ $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $\sqrt{3}-i$

จะได้ $r=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{3+1}=\sqrt{4}=2$

เนื่องจาก $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ และ $\left(\sqrt{3},-1\right)$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 4

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ $\tan\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ คือ $\frac{11\pi}{6}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $\sqrt{3}-i$ คือ $2\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $\sqrt{3}-i$ คือ $2\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$

3) ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-1+\sqrt{3}i$

จะได้ $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

เนื่องจาก $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$ และ $(-1, \sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 2

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ $\tan\theta = -\sqrt{3}$ คือ $\dfrac{2\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-1+\sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $-1+\sqrt{3}i$ คือ $2\left(\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

4) ให้ $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรูปเชิงขั้วของ $-4-4\sqrt{3}i$

จะได้ $r = \sqrt{(-4)^2 + (-4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+48} = \sqrt{64} = 8$

เนื่องจาก $\tan\theta = \dfrac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$ และ $(-4, -4\sqrt{3})$ เป็นจุดในจตุภาคที่ 3

จะได้ว่า θ ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ $\tan\theta = \sqrt{3}$ คือ $\dfrac{4\pi}{3}$

ดังนั้น รูปเชิงขั้วรูปหนึ่งของ $-4-4\sqrt{3}i$ คือ $8\left(\cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)$

และรูปเชิงขั้วทั่วไปของ $-4-4\sqrt{3}i$ คือ $8\left(\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi\right)\right)$

เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$ ■

ตัวอย่างที่ 19

จงหาค่าของ r และ θ เมื่อกำหนด $r(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = \sqrt{3}+i$ และ $0 \le \theta \le 2\pi$

วิธีทำ เนื่องจาก $r = \left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

และ $\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)$

$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right)$ เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$

ดังนั้น $2\theta = \frac{\pi}{6}+2k\pi$ เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$

นั่นคือ $\theta = \frac{\pi}{12}+k\pi$ เมื่อ $k\in\mathbb{Z}$

แต่เนื่องจาก $0\le\theta\le 2\pi$ ดังนั้น ค่า k ที่เป็นไปได้ คือ 0 และ 1

ซึ่งทำให้ได้ว่า $r=2$ และ $\theta=\frac{\pi}{12}$ หรือ $\theta=\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{13\pi}{12}$ ■

จากที่กล่าวมาข้างต้น เป็นการกล่าวถึงรูปเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน z โดยที่ $z\neq 0$ ในกรณีที่ $z=0$ จะไม่กล่าวถึง θ แต่ถ้าต้องการกล่าวถึง มีข้อตกลงว่า θ เป็นมุมขนาดใดก็ได้

ทฤษฎีบทต่อไปนี้แสดงผลคูณ ผลหาร และสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว

ทฤษฎีบท 5

ให้ $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ และ $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ โดยที่ $z_1\neq 0$ และ $z_2\neq 0$ จะได้ว่า

1. $z_1z_2 = r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$
2. $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2-i\sin\theta_2)$
3. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$
4. $\overline{z_1} = r_1\left(\cos(-\theta_1)+i\sin(-\theta_1)\right)$

พิสูจน์ 1.
$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right) \\ &= r_1r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right) \end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned} \frac{1}{z_2} &= \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\cdot\frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2} \\ &= \frac{\cos\theta_2 - i\sin\theta_2}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)} \\ &= \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) \end{aligned}$$

3. เนื่องจากสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง θ จะได้ว่า $\cos(-\theta) = \cos\theta$

และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

เนื่องจาก $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$

นั่นคือ $\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2))$

และ
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= (z_1)\left(\frac{1}{z_2}\right) \\ &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot\frac{1}{r_2}(\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)) \end{aligned}$$

4. เนื่องจากสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง θ จะได้ว่า $\cos(-\theta) = \cos\theta$

และ $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

ดังนั้น $\overline{z_1} = r_1(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1) = r_1(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))$

ตัวอย่างที่ 20

จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $\left(2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)\left(4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

2) $\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

วิธีทำ 1) $\left(2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\right)\left(4\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)\right)$

$= \left(2\sqrt{3}\right)(4)\left(\cos\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 1

$= 8\sqrt{3}\left(\cos\frac{19\pi}{6}+i\sin\frac{19\pi}{6}\right)$

$= 8\sqrt{3}\left(\cos\left(2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(2\pi+\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

$= 8\sqrt{3}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$= 8\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

$= -12-4\sqrt{3}i$

2) $\dfrac{2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)}{8\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$

$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}\right)\right)$ จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 3

$= \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

$= -\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}i$ ■

จากผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว จะเห็นว่า ถ้า $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ แล้ว

$$z^2 = z\cdot z = r^2\left(\cos(\theta+\theta)+i\sin(\theta+\theta)\right) = r^2(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)$$

$$z^3 = z^2\cdot z = r^3\left(\cos(2\theta+\theta)+i\sin(2\theta+\theta)\right) = r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)$$

ดังนั้น เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$z^n = r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

จึงสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 6 ทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ (De Moivre's Theorem)

ให้ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$z^n = r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า $r \neq 0$
ให้ n เป็นจำนวนเต็ม
กรณี n เป็นจำนวนเต็มบวก

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

กรณี $n = 0$

เนื่องจาก $r^0 = 1, \cos 0 = 1$ และ $\sin 0 = 0$

จะได้ว่า $r^0(\cos(0\cdot\theta) + i\sin(0\cdot\theta)) = 1(1 + i\cdot 0) = 1 = z^0$

ดังนั้น $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ เมื่อ $n = 0$

กรณี n เป็นจำนวนเต็มลบ

ให้ $k = -n$

จะได้ว่า k เป็นจำนวนเต็มบวก และ $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์

ดังนั้น
$$
\begin{aligned}
z^n &= \frac{1}{z^{-n}} \\
&= \frac{1}{z^k} \\
&= \frac{1}{r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)} \\
&= r^{-k}(\cos k\theta - i\sin k\theta) && \text{จากทฤษฎีบท 5 ข้อ 2} \\
&= r^n(\cos(-n\theta) - i\sin(-n\theta)) \\
&= r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)
\end{aligned}
$$

สรุปได้ว่า $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 7

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ตัวอย่างที่ 21

จงเขียน $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i\right)^{12}$ ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

วิธีทำ เนื่องจาก $\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$ เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $3\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

และจากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i\right)^{12} &= 3^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4}+i\sin\frac{12\pi}{4}\right)\\ &= 3^{12}\left(\cos 3\pi+i\sin 3\pi\right)\\ &= 3^{12}\left(-1+i(0)\right)\\ &= -531,441\end{aligned}$$

■

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว
   1) $1+\sqrt{3}i$
   2) $1-i$
   3) $-2\sqrt{3}+2i$
   4) $-4-4i$
   5) $12-12\sqrt{3}i$
   6) $-i$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
   1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)^{5}$
   2) $\left(\sqrt{3}-i\right)^{7}$
   3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{100}$
   4) $\frac{(1-i)^{6}}{(-1-i)^{4}}$
   5) $\frac{\left(-\sqrt{3}+i\right)^{3}\left(2\sqrt{3}+2i\right)^{5}}{(4i)^{4}}$
   6) $\frac{\left(\overline{2\sqrt{3}+6i}\right)^{80}}{(2+2i)^{45}\left(\sqrt{3}-i\right)^{35}}$

3. จงหาค่าของ r และ θ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก
   1) $r(\cos\theta + i\sin\theta) = 1-\sqrt{3}i$ เมื่อ $2\pi \le \theta < 6\pi$
   2) $r(\cos\theta + i\sin\theta) = -1-i$ เมื่อ $5\pi \le \theta < 7\pi$
   3) $r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = -1-i$ เมื่อ $0 \le \theta < 2\pi$

1.6 รากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

ในหัวข้อที่ 1.3 ได้กล่าวถึงการหารากที่สองของจำนวนเชิงซ้อน สำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการนำทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์มาช่วยในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก โดยถ้าให้ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ n เป็นจำนวนเต็มบวก รากที่ n ของ w คือ จำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $z^n = w$ เช่น $2+i$ เป็นรากที่ 3 ของ $2+11i$ เนื่องจาก $(2+i)^3 = 2+11i$

ตัวอย่างที่ 22

จงหารากที่ 3 ของ 1 พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

วิธีทำ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 3 ของ 1

จะได้ $z^3 = 1$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $z^3 = r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)$

และเนื่องจาก $1 = 1 + i(0) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

ดังนั้น $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

จะได้ว่า $r^3 = 1$ และ $3\theta - 0 = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = 1$ และ $\theta = \dfrac{2k\pi}{3}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 1\left(\cos\dfrac{2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{2k\pi}{3}\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อแทน k ด้วย $0, 1$ และ 2 จะแทน z ด้วย z_1, z_2 และ z_3 ตามลำดับ ดังนี้

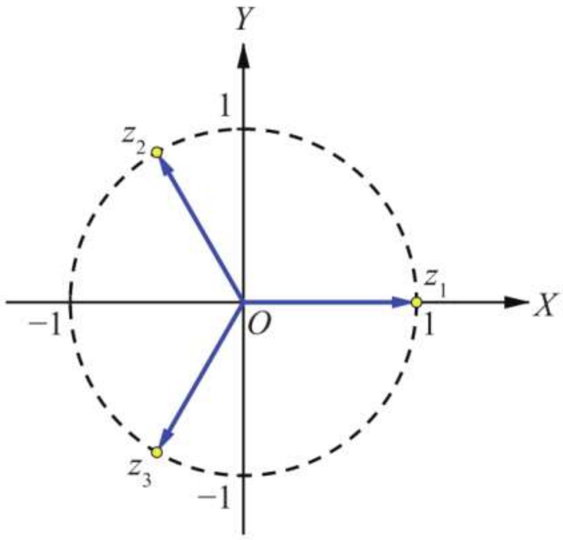
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 1$

เมื่อ $k=1$ จะได้ $z_2 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อ $k=2$ จะได้ $z_3 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

เมื่อแทน k ด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ จะได้ จำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกับ z_1, z_2 หรือ z_3 แสดงว่ารากที่ 3 ของ 1 ที่แตกต่างกันมี 3 จำนวนเท่านั้น คือ z_1, z_2 และ z_3

เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 3 ของ 1 มีขนาด 1 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกันทำมุมขนาด $\frac{2\pi}{3}$ หรือ 120° เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 23

จงหารากที่ 6 ของ -64 พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

วิธีทำ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 6 ของ -64

จะได้ $z^6 = -64$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $z^6 = r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta)$

และเนื่องจาก $-64 = 64(-1+i(0)) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

ดังนั้น $r^6(\cos 6\theta + i\sin 6\theta) = 64(\cos\pi + i\sin\pi)$

จะได้ว่า $r^6 = 64$ และ $6\theta - \pi = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = 2$ และ $\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{6}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อแทน k ด้วย $0, 1, 2, 3, 4$ และ 5 จะแทน z ด้วย z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 และ z_6 ตามลำดับ ดังนี้

เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i$

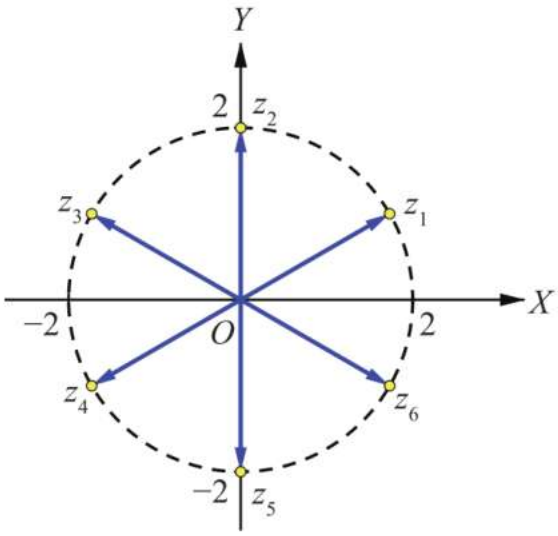
เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i$

เมื่อ $k = 4$ จะได้ $z_5 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$

เมื่อ $k = 5$ จะได้ $z_6 = 2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i$

เมื่อแทน k ด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ จะได้ จำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกับ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 หรือ z_6 แสดงว่ารากที่ 6 ของ -64 ที่แตกต่างกันมี 6 จำนวนเท่านั้น คือ z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 และ z_6 เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 6 ของ -64 มีขนาด 2 หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{3}$ หรือ $60°$ เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 24

จงหารากที่ 4 ของ $1+\sqrt{3}i$ พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

วิธีทำ ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $1+\sqrt{3}i$

จะได้ $z^4 = 1+\sqrt{3}i$

จากทฤษฎีบทของเดอมัวฟวร์ จะได้ $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

และเนื่องจาก $1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ดังนั้น $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

จะได้ว่า $r^4 = 2$ และ $4\theta - \frac{\pi}{3} = 2k\pi$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

นั่นคือ $r = \sqrt[4]{2}$ และ $\theta = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

ดังนั้น $z = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{Z}$

เมื่อแทน k ด้วย $0, 1, 2$ และ 3 จะแทน z ด้วย z_1, z_2, z_3 และ z_4 ตามลำดับ ดังนี้

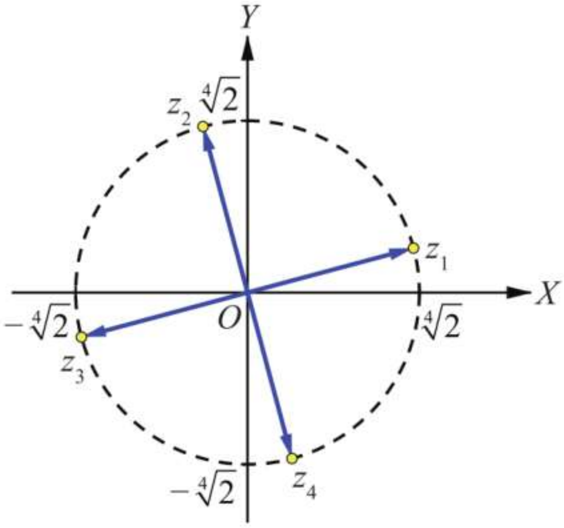
เมื่อ $k = 0$ จะได้ $z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$

เมื่อ $k = 1$ จะได้ $z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$

เมื่อ $k = 2$ จะได้ $z_3 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right)$

เมื่อ $k = 3$ จะได้ $z_4 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)\right)$

เมื่อแทน k ด้วยจำนวนเต็มอื่น ๆ จะได้ จำนวนเชิงซ้อนที่ซ้ำกับ z_1, z_2, z_3 หรือ z_4 แสดงว่ารากที่ 4 ของ $1+\sqrt{3}i$ ที่แตกต่างกันมี 4 จำนวนเท่านั้น คือ z_1, z_2, z_3 และ z_4 เวกเตอร์ที่แสดงรากที่ 4 ของ $1+\sqrt{3}i$ มีขนาด $\sqrt[4]{2}$ หน่วย และเวกเตอร์แต่ละคู่ที่อยู่ในลำดับที่ติดกัน ทำมุมขนาด $\frac{\pi}{2}$ หรือ $90°$ เท่ากันทุกคู่ ซึ่งเขียนแสดงได้ดังนี้



ในกรณีทั่วไป สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบท 8

ถ้า $w=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่เป็นศูนย์ แล้ว รากที่ n ของ w มีทั้งหมด n รากที่แตกต่างกัน คือ

$$z=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \text{ เมื่อ } k\in\{0, 1, \dots , n-1\}$$

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงหารากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

   1) -64
   2) $27i$
   3) $\sqrt{3}-i$
   4) $8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2. จงหารากที่ 2, 4 และ 8 ของ 1 และ i พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

3. จงหารากที่ 4 ของ $2+2\sqrt{3}i$

4. จงหารากที่ 5 ของ $2-2\sqrt{3}i$

5. จงหาจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

   1) $z^4=1+\sqrt{3}i$
   2) $z^5+i=0$
   3) $z^7-1=0$
   4) $z^8+4+4i=0$

1.7 สมการพหุนามตัวแปรเดียว

จากที่ทราบมาแล้วว่า สมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง อาจไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง เช่น $x^2+1=0$ และ $x^2+x+1=0$ แต่เมื่อพิจารณาคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนแล้ว สมการพหุนามเหล่านี้มีคำตอบเสมอ

ในหัวข้อที่ 1.3 ทราบแล้วว่า สมการ $x^2+1=0$ มีคำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อนสองคำตอบ คือ i และ $-i$ ในทำนองเดียวกัน สมการ $x^2+x+1=0$ มีคำตอบสองคำตอบ คือ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ และ $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ เรียกว่า ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต ซึ่งยืนยันว่าสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงจะต้องมีคำตอบในระบบจำนวนเชิงซ้อนเสมอ

ทฤษฎีบท 9 ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra)

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรีมากกว่าศูนย์ จะได้ว่าสมการ $p(x)=0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งคำตอบ

การพิสูจน์ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิตต้องใช้ความรู้ระดับสูง จึงจะขอไม่กล่าวถึงในที่นี้

ในหัวข้อนี้จะใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบและทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ เพื่อช่วยในการหาคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนาม

ทฤษฎีบท 10 ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

ให้ $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนาม โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_n \neq 0$ สำหรับจำนวนจริง c ใด ๆ จะได้ว่า

พหุนาม $p(x)$ มี $x-c$ เป็นตัวประกอบ ก็ต่อเมื่อ $p(c)=0$

ทฤษฎีบท 11 ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ (Rational Factor Theorem)

ให้ $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนาม โดยที่ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $a_n \neq 0$

ถ้า $x-\frac{k}{m}$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $p(x)$ โดยที่ m และ k เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง $m \neq 0$ และ ห.ร.ม. ของ m และ k เท่ากับ 1 แล้ว m หาร a_n ลงตัว และ k หาร a_0 ลงตัว

ตัวอย่างที่ 25

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^4+2x^2-8=0$

วิธีทำ เนื่องจาก

$$\begin{aligned} x^4+2x^2-8 &= (x^2-2)(x^2+4) \\ &= (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-2i)(x+2i) \end{aligned}$$

จะได้ว่าสมการ $x^4+2x^2-8=0$ มีคำตอบทั้งหมด 4 คำตอบ คือ $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2i$ และ $-2i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $x^4+2x^2-8=0$ คือ $\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2i, -2i\}$ ■

ตัวอย่างที่ 26

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^3-3x^2+5x+9=0$

วิธีทำ ให้ $p(x)=x^3-3x^2+5x+9$

จำนวนเต็มที่หาร 9 ลงตัว คือ $\pm1, \pm3, \pm9$

จากการตรวจสอบ $p(1)$, $p(-1)$, $p(3)$, $p(-3)$, $p(9)$ และ $p(-9)$ พบว่า $p(-1)=0$

ดังนั้น $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

จะได้ $p(x) = (x+1)(x^2-4x+9)$

ดังนั้น $x+1=0$ หรือ $x^2-4x+9=0$

ถ้า $x^2-4x+9=0$ จะได้ $x=\dfrac{4\pm\sqrt{|16-36|}\,i}{2}=2\pm\sqrt{5}\,i$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $x^3-3x^2+5x+9=0$ คือ $\{-1, 2+\sqrt{5}\,i, 2-\sqrt{5}\,i\}$ ■

ตัวอย่างที่ 27

จงหาเซตคำตอบของสมการ $2x^4+x^3-2x-1=0$

วิธีทำ ให้ $p(x)=2x^4+x^3-2x-1$

เนื่องจากจำนวนเต็มที่หาร -1 ลงตัว คือ ± 1

และจำนวนเต็มที่หาร 2 ลงตัว คือ $\pm 1, \pm 2$

ดังนั้น จำนวนตรรกยะ $\frac{k}{m}$ ที่ทำให้ $p\left(\frac{k}{m}\right)=0$ จะอยู่ในกลุ่มของจำนวนต่อไปนี้

คือ $\pm 1, \pm\frac{1}{2}$

จากการตรวจสอบพบว่า $p(1)=0$ และ $p\left(-\frac{1}{2}\right)=0$

ดังนั้น $x-1$ และ $x+\frac{1}{2}$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$

จะได้ $p(x)=(x-1)(2x+1)(x^2+x+1)$

ดังนั้น $x-1=0$ หรือ $2x+1=0$ หรือ $x^2+x+1=0$

ถ้า $x^2+x+1=0$ แล้ว $x=\frac{-1\pm\sqrt{|1-4|}\,i}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}\,i}{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $2x^4+x^3-2x-1=0$ คือ $\left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}\,i}{2}\right\}$ ■

โดยใช้ทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต สามารถพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 12

ให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและมีดีกรี n เมื่อ $n\geq 1$ จะได้ว่าสมการ $p(x)=0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด n คำตอบ เมื่อนับคำตอบที่ซ้ำกัน

พิสูจน์ ให้ $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ เป็นพหุนามดีกรี n เมื่อ $n\geq 1$

จากทฤษฎีบทหลักมูลของพีชคณิต จะได้ว่าสมการ $p(x)=0$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คำตอบ

ให้ c_1 เป็นคำตอบของสมการ $p(x)=0$

นั่นคือ $x-c_1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$p(x)=(x-c_1)q_1(x)$$

โดยที่ $q_1(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n-1$

ถ้า $n-1\geq 1$ สมการ $q_1(x)=0$ จะมีคำตอบที่เป็นจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อย 1 คำตอบ

ให้ c_2 เป็นคำตอบของสมการ $q_1(x)=0$

นั่นคือ $x-c_2$ เป็นตัวประกอบของ $q_1(x)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$p(x)=(x-c_1)(x-c_2)q_2(x)$$

โดยที่ $q_2(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $n-2$

เมื่อดำเนินการเช่นนี้ไป n ครั้ง จะได้ว่า

$$p(x)=(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)r(x)$$

แต่ $(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)$ เป็นพหุนามดีกรี n ซึ่งเท่ากับดีกรีของ $p(x)$

จึงได้ว่า $r(x)$ ต้องเป็นค่าคงตัว นั่นคือ $r(x)=a_n$

ดังนั้น $p(x)=a_n(x-c_1)(x-c_2)(x-c_3)\ldots(x-c_n)$

นั่นคือ คำตอบทั้งหมดของสมการ $p(x)=0$ คือ $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$

ตัวอย่างเช่น $(x-1)(x-2i)(x+2i)(x-7)^3(x+6)^2=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 8 จะมีคำตอบทั้งหมด 8 คำตอบ โดยมีคำตอบที่แตกต่างกันทั้งหมด 5 คำตอบ คือ $1, 7, -6, 2i$ และ $-2i$ โดยที่ 7 เป็นคำตอบซ้ำ 3 คำตอบ และ -6 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ

ตัวอย่างที่ 28

จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=0$

วิธีทำ ให้ $p(x)=x^4-2x^3+5x^2-8x+4$

จำนวนเต็มที่หาร 4 ลงตัว คือ $\pm1, \pm2, \pm4$

จากการตรวจสอบพบว่า $p(1)=0$
ดังนั้น $x-1$ เป็นตัวประกอบของ $p(x)$
จะได้ $p(x) = (x-1)^2(x^2+4)$
$= (x-1)^2(x-2i)(x+2i)$
จะได้ว่าสมการ $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=0$ มีคำตอบทั้งหมด 4 คำตอบ คือ $1, 1, 2i$ และ $-2i$
และมีคำตอบที่แตกต่างกันทั้งหมด 3 คำตอบ คือ $1, 2i$ และ $-2i$
ดังนั้น เซตคำตอบของสมการ $x^4-2x^3+5x^2-8x+4=0$ คือ $\{1, 2i, -2i\}$ ■

ทฤษฎีบท 13

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม

$$x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

โดยที่สัมประสิทธิ์ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $\overline{z}$ จะเป็นคำตอบของสมการพหุนามนี้

พิสูจน์ ให้จำนวนเชิงซ้อน z เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

จะได้

$$z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

$$\overline{z^n + a_1z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}z + a_n} = \overline{0}$$

$$\overline{z^n} + \overline{a_1z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_{n-1}z} + \overline{a_n} = 0$$

$$\overline{z^n} + a_1\overline{z^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\overline{z} + a_n = 0$$ เนื่องจาก $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ เป็นจำนวนจริง

$$\overline{z}^n + a_1\overline{z}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\overline{z} + a_n = 0$$

ดังนั้น $\overline{z}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$

ตัวอย่างที่ 29

จงแสดงว่า $2+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4-7x^2+20x+14=0$ และจงหาเซตคำตอบของสมการนี้

วิธีทำ ให้ $p(x) = x^4-7x^2+20x+14$

จะได้
$$\begin{aligned} p(2+\sqrt{3}i) &= (2+\sqrt{3}i)^4-7(2+\sqrt{3}i)^2+20(2+\sqrt{3}i)+14 \\ &= (1+4\sqrt{3}i)^2-7(1+4\sqrt{3}i)+40+20\sqrt{3}i+14 \\ &= -47+8\sqrt{3}i-7-28\sqrt{3}i+40+20\sqrt{3}i+14 \\ &= 0 \end{aligned}$$

ดังนั้น $2+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการ $p(x)=0$

จากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $2-\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

เนื่องจาก $\left(x-(2+\sqrt{3}i)\right)\left(x-(2-\sqrt{3}i)\right)=x^2-4x+7$

และเมื่อนำ x^2-4x+7 ไปหาร $p(x)$ ได้ผลหารเป็น x^2+4x+2

จะได้ $p(x)=(x^2-4x+7)(x^2+4x+2)$

ดังนั้น $x^2-4x+7=0$ หรือ $x^2+4x+2=0$

ถ้า $x^2+4x+2=0$ แล้ว $x=-2+\sqrt{2}$ หรือ $x=-2-\sqrt{2}$

ดังนั้น เซตคำตอบของสมการนี้ คือ $\{2+\sqrt{3}i,\ 2-\sqrt{3}i,\ -2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}\}$ ■

ตัวอย่างที่ 30

จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี 3, -4 และ $3+i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

วิธีทำ เนื่องจาก $3+i$ เป็นคำตอบของสมการ และจากทฤษฎีบท 13 จะได้ว่า $3-i$ เป็นคำตอบของสมการด้วย

จะได้

$$\begin{aligned}(x-3)(x+4)\big(x-(3+i)\big)\big(x-(3-i)\big) &= 0\\ (x^2+x-12)(x^2-6x+10) &= 0\\ x^4-5x^3-8x^2+82x-120 &= 0\end{aligned}$$

ดังนั้น $x^4-5x^3-8x^2+82x-120=0$ เป็นสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี 3, -4 และ $3+i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ ■

แบบฝึกหัด 1.7

1. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1) $2x^3+2x^2+x+1=0$
   2) $2x^3-x+1=0$
   3) $x^4-6x^2-40=0$
   4) $x^4-x^3+7x^2-9x-18=0$
   5) $x^4-6x^3+15x^2-22x+12=0$
   6) $x^5+8x^4+24x^3+26x^2-17x-42=0$

2. จงแสดงว่า $-1+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^5+9x^3-8x^2-72=0$ พร้อมทั้งหาเซตคำตอบของสมการพหุนามนี้

3. จงหาสมการพหุนามดีกรี 4 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี $2-2\sqrt{3}i$ และ $-4i$ เป็นคำตอบ และมี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

4. จงแสดงว่าสมการพหุนาม $x^2 - x + (i+1) = 0$ มี i เป็นคำตอบ แต่ $-i$ ไม่ใช่คำตอบ พร้อมทั้งอธิบายว่าผลที่ได้ขัดแย้งกับทฤษฎีบท 13 หรือไม่

5. จงหาสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และสอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) $-3, 2$ และ i เป็นคำตอบ
   2) $2i$ และ 5 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ และ 3 คำตอบ ตามลำดับ

6. จงแสดงว่า -2 เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ ของสมการพหุนาม $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 28x + 52 = 0$ พร้อมทั้งหาเซตคำตอบของสมการพหุนามนี้

7. จงหาเซตคำตอบของสมการพหุนาม $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 22x + 12 = 0$ เมื่อ $1+i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการพหุนามนี้

แบบฝึกหัดท้ายบท

1 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $2(1+5i)+3(-3-2i)$
2) $i(2-4i)+i^2(-3+i)$
3) $4(2-5i)-i(1-i)$
4) $\frac{i}{2}(4-3i)-\frac{3}{2}(2-i)$
5) $(\sqrt{3}-\sqrt{5}i)(\sqrt{3}+\sqrt{5}i)(-1-i)$
6) $\frac{5}{3-2i}$
7) $\frac{4-3i}{2+3i}$
8) $\frac{(3-2i)(2i)}{-2+3i}$
9) $-5i(2-3i)-\frac{5i}{4-3i}$
10) $\frac{1}{1-i}+5-\frac{1}{(1-i)^2}+\frac{1}{(1-i)^3}$

2 ให้ x, y, a และ b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า ถ้า $(x+yi)^4=a+bi$ แล้ว $a^2+b^2=(x^2+y^2)^4$

3 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $\frac{i^7+2i^2}{i^3}$
2) $1+i^{-1}+i^{-2}+\cdots+i^{-16}$
3) $\frac{(2+i)(3+2i)}{1+i}$
4) $(2+i)^2+(2-i)^2$
5) $\frac{3+4i}{3-4i}-\frac{3-4i}{3+4i}$
6) $i(\sqrt{3}+i)^{-1}+(\overline{3+2i})$

4 กำหนดให้ $z_1=\frac{1}{2+i}$ และ $z_2=3-2i$ จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $z_2\overline{z_2}$
2) $\overline{z_2+z_1}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$
4) $\overline{z_1}+\frac{1}{z_2}$
5) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)(1-i)$
6) $\frac{\overline{z_1}-z_2}{z_1}$
7) $\left(\overline{z_1+\overline{z_2}}\right)z_1^{-1}$
8) $\frac{(\overline{z_1-2})(\overline{z_2-i})}{3i}$

5 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

1) $\overline{iz} = -i\overline{z}$

2) $\text{Im}(iz) = \text{Re}(z)$

3) $\text{Re}(iz) = -\text{Im}(z)$

6 จงหาจำนวนจริง a และ b ที่สอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

1) $(1+i)a + 2(1-2i)b = 3$

2) $(1+2i)a + (2-3i)b = 10$

7 ให้ $z = 3-4i$ จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในระนาบเชิงซ้อน

1) $3z$

2) $\overline{z}$

3) $\frac{1}{z}$

4) iz

5) z^3

6) รากที่สองของ z

8 จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $\frac{(2-3i)(3+4i)}{(6+4i)(15-8i)}$

2) $\frac{3(1-3i)^2}{1+i}$

9 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

1) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)$

2) $\frac{-2i}{5+5i}$

3) $\left(-3+\sqrt{3}i\right)^4$

4) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^5\left(-1-\sqrt{3}i\right)^{-4}$

10 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $a+bi$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

1) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{3}i\right)^8$

2) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{10}$

3) $\frac{1}{(-1-i)^{10}}$

4) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{i}{3}\right)^{100}$

5) $\frac{(-1+i)^6\left(\sqrt{3}-i\right)^8}{\left(1+\sqrt{3}i\right)^5}$

11 จงหาค่าของ r และ θ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง เมื่อ r เป็นจำนวนจริงบวก

1) $r(\cos\theta + i\sin\theta) = -\sqrt{3} + 3i$ เมื่อ $6\pi \le 3\theta \le 9\pi$
2) $r^3(\cos 3\theta + i\sin 3\theta) = -1 - i$ เมื่อ $-2\pi \le \theta \le \pi$
3) $r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = -\sqrt{3} - i$ เมื่อ $-4\pi \le \theta < 0$

12 กำหนดให้ $z_k = \frac{k}{k+1}\left(\cos\frac{k\pi}{180} + i\sin\frac{k\pi}{180}\right)$ เมื่อ $k \in \mathbb{N}$ จงหาผลคูณ $z_1 z_2 z_3 \ldots z_{180}$

13 จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่ $\mathrm{Re}(z)$ มากที่สุด และสอดคล้องกับสมการ $z^5 - \sqrt{2} - \sqrt{2}i = 0$

14 จงหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1) $-27i$ เมื่อ $n = 3$
2) $-2 - 2\sqrt{3}i$ เมื่อ $n = 4$
3) 1 เมื่อ $n = 5$
4) $-i$ เมื่อ $n = 8$

15 จงหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนเวกเตอร์แสดงรากที่หาได้ในระนาบเชิงซ้อน

1) $-8i$ เมื่อ $n = 3$
2) $-2\sqrt{3} + 2i$ เมื่อ $n = 3$
3) $2 - 2\sqrt{3}i$ เมื่อ $n = 4$
4) $27\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ เมื่อ $n = 2$

16 จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $5x^2 + 2x + 2 = 0$
2) $(2x-3)^2 + 9 = 0$
3) $(x+2)(x^2 + 4x + 5) = 0$
4) $2x^3 + x^2 + 1 = 0$

17 จงหาสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และสอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $2, -i$ และ $2 + 3i$ เป็นคำตอบ
2) $0, 3i$ และ $1 - i$ เป็นคำตอบ

18 จงหาสมการพหุนามดีกรีต่ำสุดที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง มี 1 เป็นสัมประสิทธิ์นำ และสอดคล้องกับเงื่อนไขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) 6 และ $-2+i$ เป็นคำตอบ

2) -3 และ $1+2i$ เป็นคำตอบซ้ำ 2 คำตอบ ทั้งสองคำตอบ

19 จงหาสมการพหุนามดีกรี 5 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม มี $-\frac{2}{3}, -1+i$ และ $3+\sqrt{3}i$ เป็นคำตอบ และมี 3 เป็นสัมประสิทธิ์นำ

20 จงหาจำนวนจริง a และ b ที่ทำให้ $1+2i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการพหุนาม $z^3+az+b=0$

21 จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $x^2-x-12=0$

2) $x^4+4x^3+4x^2=0$

3) $x^6+x^4+x^2+1=0$

4) $2x^4-2x^3-x^2+1=0$

5) $x^4+x^3-5x^2+x-6=0$

6) $2x^4+x^3+2x^2-19x-10=0$

⍟22. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงแสดงว่า $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^n+\left(-1-\sqrt{3}i\right)^n$ เป็นจำนวนจริง

23 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า $z+\overline{z}$ และ $z\overline{z}$ เป็นจำนวนจริง

24 ให้ a เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ k เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่าเซตของจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $(z-a)(\overline{z}-\overline{a})=k^2$ คือ เซตของจุดในระนาบซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด a และรัศมียาว k หน่วย

25. จงเขียนกราฟแสดงจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการหรืออสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $|z+3-2i|>1$
2) $\operatorname{Re}(z-i)>-5$
3) $|z-3|\geq|z|$
4) $\operatorname{Re}(z-2+i)<-2$
5) $|z+6|=|z-2|$
6) $|z-i|=|z+4i|$
7) $|\overline{z-3i}|=|z-3|$
8) $|z-2+i|=|z-\overline{(6+3i)}|$

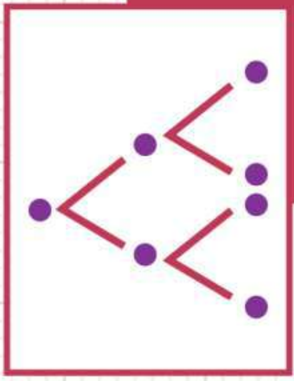
⊛ 26. จงหาจำนวนเชิงซ้อน z ที่สอดคล้องกับสมการ $|z-i|=2$ ซึ่ง $|z|$ มากที่สุด

27. จงแสดงว่า $-1-\sqrt{2}i$ เป็นคำตอบของสมการพหุนาม $x^5+2x^4-4x^3-8x^2-9x+18=0$ พร้อมทั้งหาเซตคำตอบของสมการพหุนามนี้

28. จงแสดงว่า -1 เป็นคำตอบซ้ำ 3 คำตอบ ของสมการพหุนาม $x^5+9x^4+33x^3+55x^2+42x+12=0$ พร้อมทั้งหาเซตคำตอบของสมการพหุนามนี้

29. จงหาเซตคำตอบทั้งหมดของสมการพหุนาม $x^5-9x^4+24x^3+6x^2-112x+120=0$ เมื่อ $3+i$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการพหุนามนี้

บทที่ 2 | หลักการนับเบื้องต้น



2.1 หลักการบวกและหลักการคูณ
2.2 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด
2.3 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด
2.4 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด
2.5 การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด
2.6 ทฤษฎีบททวินาม

จุดมุ่งหมาย

1. ใช้หลักการนับเบื้องต้นในการแก้ปัญหา
2. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
3. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นกรณีที่สิ่งของไม่แตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
4. ใช้วิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมกรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
5. ใช้วิธีจัดหมู่กรณีที่สิ่งของแตกต่างกันทั้งหมดในการแก้ปัญหา
6. ใช้ทฤษฎีบททวินามในการแก้ปัญหา

บทที่ 2

หลักการนับเบื้องต้น

เมื่อ พ.ศ. 2549 คณะกรรมการกิจการโทรคมนาคมแห่งชาติ (กทช.) ได้ออกประกาศเปลี่ยนแปลงเลขหมายโทรคมนาคมสำหรับบริการโทรศัพท์เคลื่อนที่จาก 9 หลัก เป็น 10 หลัก เพื่อรองรับการใช้งานโทรศัพท์เคลื่อนที่ซึ่งเพิ่มขึ้นอย่างรวดเร็วและต่อเนื่อง โดยคาดว่าจะสามารถรองรับความต้องการใช้โทรศัพท์เคลื่อนที่ในอนาคตประมาณ 30 ปี ได้อย่างเพียงพอ ในปัจจุบันเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่จะขึ้นต้นด้วย 08, 09 หรือ 01 และตามด้วยเลขโดดอีก 8 ตัว หรือขึ้นต้นด้วย 061, 062, 063, 064 หรือ 065 และตามด้วยเลขโดดอีก 7 ตัว ซึ่งสามารถคำนวณได้ว่าจะมีเลขหมายโทรศัพท์เคลื่อนที่รองรับการใช้งานทั้งหมด 350,000,000 เลขหมาย โดยใช้ความรู้เรื่องหลักการนับเบื้องต้น ซึ่งเป็นศาสตร์ที่ว่าด้วยการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการนับ ช่วยให้การคำนวณทำได้ง่ายและสะดวกรวดเร็วขึ้น นอกจากตัวอย่างข้างต้นแล้ว ความรู้เรื่องหลักการนับเบื้องต้นยังสามารถนำไปใช้ในชีวิตจริงได้อีกมาก เช่น การกำหนดหมายเลขทะเบียนรถยนต์ เลขเรียกหนังสือในห้องสมุด หรือรหัสต่าง ๆ



ความรู้ก่อนหน้า

- ความรู้เกี่ยวกับจำนวนและหลักการนับเบื้องต้นในระดับมัธยมศึกษาตอนต้น

ipst.me/8449

2.1 หลักการบวกและหลักการคูณ

ถ้าบัวตองจะเดินทางจากกรุงเทพฯ กลับไปเยี่ยมบ้านที่เชียงใหม่ บัวตองอาจเลือกเดินทางโดยเครื่องบิน หรือรถประจำทาง สมมติว่ามีสายการบินและบริษัทรถประจำทางให้เลือกดังตาราง แล้วบัวตองจะเลือกบริษัทผู้ให้บริการได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีเดินทาง	บริษัทผู้ให้บริการ
เครื่องบิน	ยิ้มสยาม การบินเอเชีย วิหคเหินฟ้า กรุงเทพการบิน เชียงใหม่แอร์เวย์ ไทยการบิน
รถประจำทาง	กรุงเทพทัวร์ มาลีทัวร์ สบายทัวร์ สยามทัวร์ ทัวร์ทั่วไทย

จะเห็นว่า มีบริษัทสายการบินให้เลือกทั้งหมด 6 บริษัท และมีบริษัทรถประจำทางให้เลือกทั้งหมด 5 บริษัท ดังนั้น บัวตองสามารถเลือกบริษัทผู้ให้บริการสำหรับเดินทางกลับเชียงใหม่ได้ทั้งหมด 11 วิธี

การแก้ปัญหาข้างต้นได้ใช้การนับโดยแบ่งวิธีที่เป็นไปได้ออกเป็น 2 กรณี ได้แก่ กรณีที่เดินทางโดยเครื่องบิน และกรณีที่เดินทางโดยรถประจำทาง ซึ่งบริษัทผู้ให้บริการในทั้งสองกรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน จากนั้นจึงนำจำนวนบริษัทผู้ให้บริการในทั้งสองกรณีมาบวกกัน

หลักการนับจำนวนสิ่งของ เหตุการณ์ หรือวิธีการทำงานเช่นนี้ เรียกว่า **หลักการบวก (addition principle)**

หลักการบวก

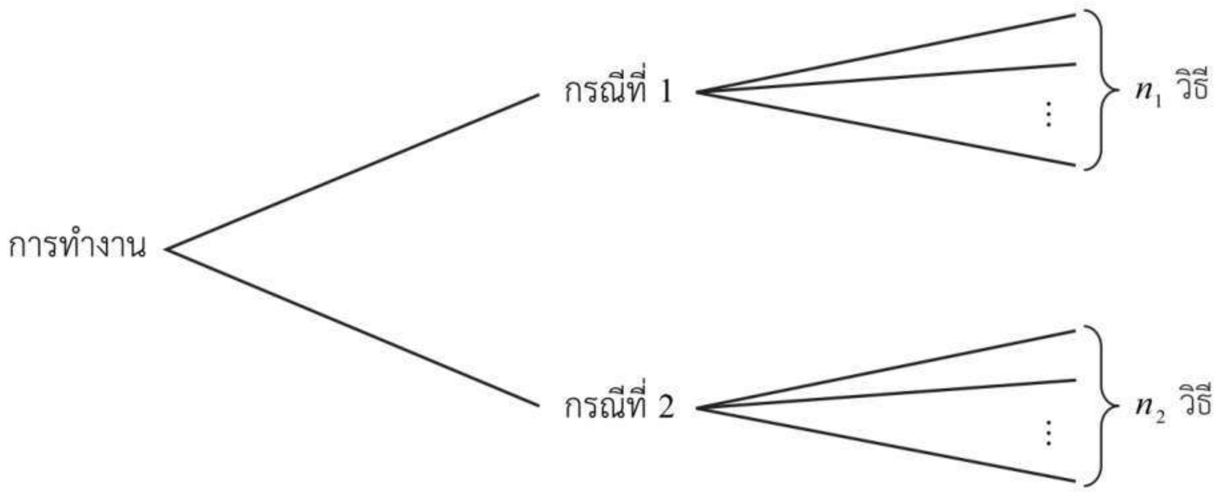
ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งวิธีการทำงานออกเป็น 2 กรณี โดยที่

กรณีที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

กรณีที่ 2 สามารถทำได้ n_2 วิธี

ซึ่งวิธีการทำงานในทั้งสองกรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน และการทำงานในแต่ละกรณีทำให้งานเสร็จสมบูรณ์ แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 + n_2$ วิธี

สามารถอธิบายแนวคิดของหลักการบวกได้ดังแผนภาพ ซึ่งจะเห็นได้ง่ายว่า จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมดเท่ากับ $n_1 + n_2$ วิธี



หลักการบวกข้างต้น สามารถนำไปใช้นับจำนวนวิธีการทำงาน จำนวนสิ่งของ หรือจำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้นได้ โดยแบ่งสิ่งที่ต้องการนับออกเป็นกรณีย่อย ๆ และแต่ละกรณีทำให้งานหรือเหตุการณ์เสร็จสมบูรณ์ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 1

สมมติว่าเมืองหนึ่งมีถนนและลำคลองอยู่หลายสาย และในการเดินทางจากตำบล A ไปยังตำบล B ในเมืองนี้ สามารถไปทางถนนได้ 3 เส้นทาง และสามารถไปทางลำคลองได้ 2 เส้นทาง จะมีเส้นทางจากตำบล A ไปยังตำบล B ทั้งหมดกี่เส้นทาง

วิธีทำ พิจารณาการเดินทางจากตำบล A ไปยังตำบล B ได้ดังนี้

ใช้เส้นทางตามถนนได้ 3 เส้นทาง

ใช้เส้นทางตามลำคลองได้ 2 เส้นทาง

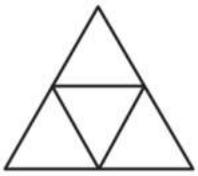
เนื่องจากเส้นทางตามถนนและเส้นทางตามลำคลองไม่ซ้ำซ้อนกัน

จากหลักการบวก จะได้ว่ามีเส้นทางจากตำบล A ไปยังตำบล B ทั้งหมด

$3+2=5$ เส้นทาง ■

ตัวอย่างที่ 2

กมลนำกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย จำนวน 4 แผ่น มาจัดเรียงชิดกัน ดังรูป



จากการจัดเรียงกระเบื้องข้างต้น มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดกี่รูป

วิธีทำ จากการจัดเรียงกระเบื้องดังรูป มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า 2 ขนาด ได้แก่

ขนาดที่ 1 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย มี 4 รูป

ขนาดที่ 2 รูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 2 หน่วย มี 1 รูป

จากหลักการบวก จะได้ว่ามีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมด $4+1=5$ รูป ■

ตัวอย่างที่ 3

จำนวนเต็มบวกสองหลักที่ผลบวกของเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่มีทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ จำนวนเต็มบวกสองหลักที่ผลบวกของเลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่ สามารถเกิดขึ้นได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคู่
จากการแจงนับ ในกรณีนี้มีทั้งหมด 20 จำนวน ได้แก่
20, 22, 24, 26, 28, 40, 42, … , 66, 68, 80, 82, 84, 86, 88

กรณีที่ 2 เลขโดดทั้งสองหลักเป็นจำนวนคี่
จากการแจงนับ ในกรณีนี้มีทั้งหมด 25 จำนวน ได้แก่
11, 13, 15, 17, 19, 31, 33, … , 77, 79, 91, 93, 95, 97, 99

จากหลักการบวก จะได้ว่าจำนวนเต็มบวกที่มีเงื่อนไขตามที่โจทย์ระบุ มีทั้งหมด
$20 + 25 = 45$ จำนวน ■

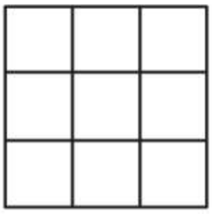
ในการนับจำนวนวิธีการทำงาน จำนวนสิ่งของ หรือจำนวนเหตุการณ์ที่จะเกิดขึ้น โดยการแบ่งพิจารณาเป็นกรณีย่อย ๆ นั้น อาจมีกรณีย่อยมากกว่า 2 กรณี ซึ่งจำนวนวิธีทั้งหมดที่เป็นไปได้จะเท่ากับผลบวกของจำนวนวิธีทั้งหมดในทุกกรณี ดังต่อไปนี้

หลักการบวก (กรณีทั่วไป)

ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งวิธีทำงานออกเป็น k กรณี โดยที่
กรณีที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี
กรณีที่ 2 สามารถทำได้ n_2 วิธี
⋮
กรณีที่ k สามารถทำได้ n_k วิธี
ซึ่งวิธีการทำงานในทั้ง k กรณีไม่ซ้ำซ้อนกัน และการทำงานในแต่ละกรณีทำให้งานเสร็จสมบูรณ์ แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

ตัวอย่างที่ 4

สมคิดนำกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย จำนวน 9 แผ่น มาจัดเรียงชิดกัน ดังรูป



จากการจัดเรียงกระเบื้องข้างต้น มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมดกี่รูป

วิธีทำ มีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด 3 ขนาด ได้แก่

ขนาดที่ 1 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย มี 9 รูป

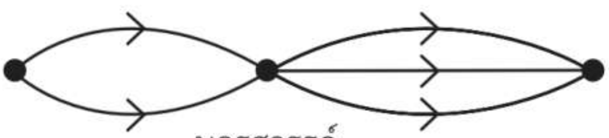
ขนาดที่ 2 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 2 หน่วย มี 4 รูป

ขนาดที่ 3 รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 3 หน่วย มี 1 รูป

จากหลักการบวก จะได้ว่ามีรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสทั้งหมด $9+4+1=14$ รูป ■

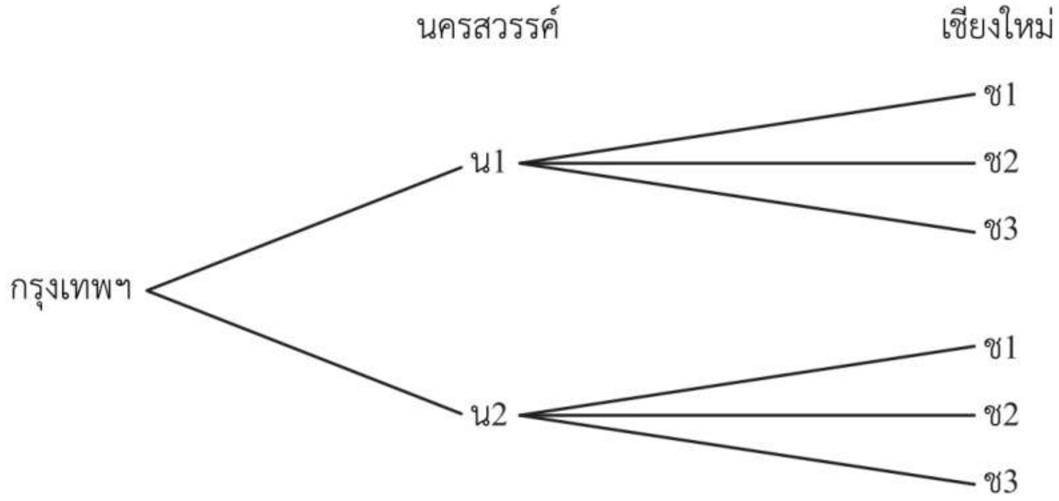
ต่อไปลองพิจารณาปัญหาการเดินทางอีกปัญหาหนึ่ง ดังนี้

สมมติว่าบัวตองจะขับรถยนต์จากกรุงเทพฯ กลับไปเยี่ยมบ้านที่เชียงใหม่ โดยระหว่างทางจะต้องแวะเยี่ยมญาติที่นครสวรรค์ด้วย ถ้าเส้นทางจากกรุงเทพฯ ไปนครสวรรค์ มี 2 เส้นทาง และเส้นทางจากนครสวรรค์ไปเชียงใหม่ มี 3 เส้นทาง แล้วบัวตองจะขับรถยนต์จากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่ได้ทั้งหมดกี่เส้นทาง



จากรูป อาจพิจารณาได้ว่า การเดินทางจากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่โดยผ่านนครสวรรค์ ประกอบด้วยขั้นตอนย่อย 2 ขั้นตอน ได้แก่ ขั้นตอนที่ 1 เดินทางจากกรุงเทพฯ ไปนครสวรรค์ ซึ่งทำได้ 2 เส้นทาง และขั้นตอนที่ 2 เดินทางจากนครสวรรค์ไปเชียงใหม่ ซึ่งทำได้ 3 เส้นทาง โดยจะต้องทำทั้งสองขั้นตอนต่อเนื่องกัน และสำหรับแต่ละเส้นทางในขั้นตอนที่ 1 จะสามารถเดินทางต่อไปในขั้นตอนที่ 2 ได้อีก 3 เส้นทาง ดังนั้น จึงมีเส้นทางที่เป็นไปได้ทั้งหมด $2\times 3=6$ เส้นทาง

หรืออาจเขียนแผนภาพแสดงแนวคิดได้ดังนี้



โดยที่ น1 และ น2 แทนเส้นทางจากกรุงเทพฯ ไปนครสวรรค์ เส้นทางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ และ ช1, ช2 และ ช3 แทนเส้นทางจากนครสวรรค์ไปเชียงใหม่ เส้นทางที่ 1, 2 และ 3 ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนเส้นทางจากกรุงเทพฯ ไปเชียงใหม่ จึงมีทั้งหมด 6 เส้นทาง ได้แก่ น1ช1, น1ช2, น1ช3, น2ช1, น2ช2 และ น2ช3

ในการแก้ปัญหานี้ ทำได้โดยการพิจารณาว่า การเดินทางในแต่ละเส้นทางประกอบด้วยขั้นตอนย่อย ๆ ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกัน แล้วนำจำนวนวิธีในขั้นตอนย่อยมาคูณกัน หลักการนับเช่นนี้ เรียกว่า **หลักการคูณ (multiplication principle)**

หลักการคูณ

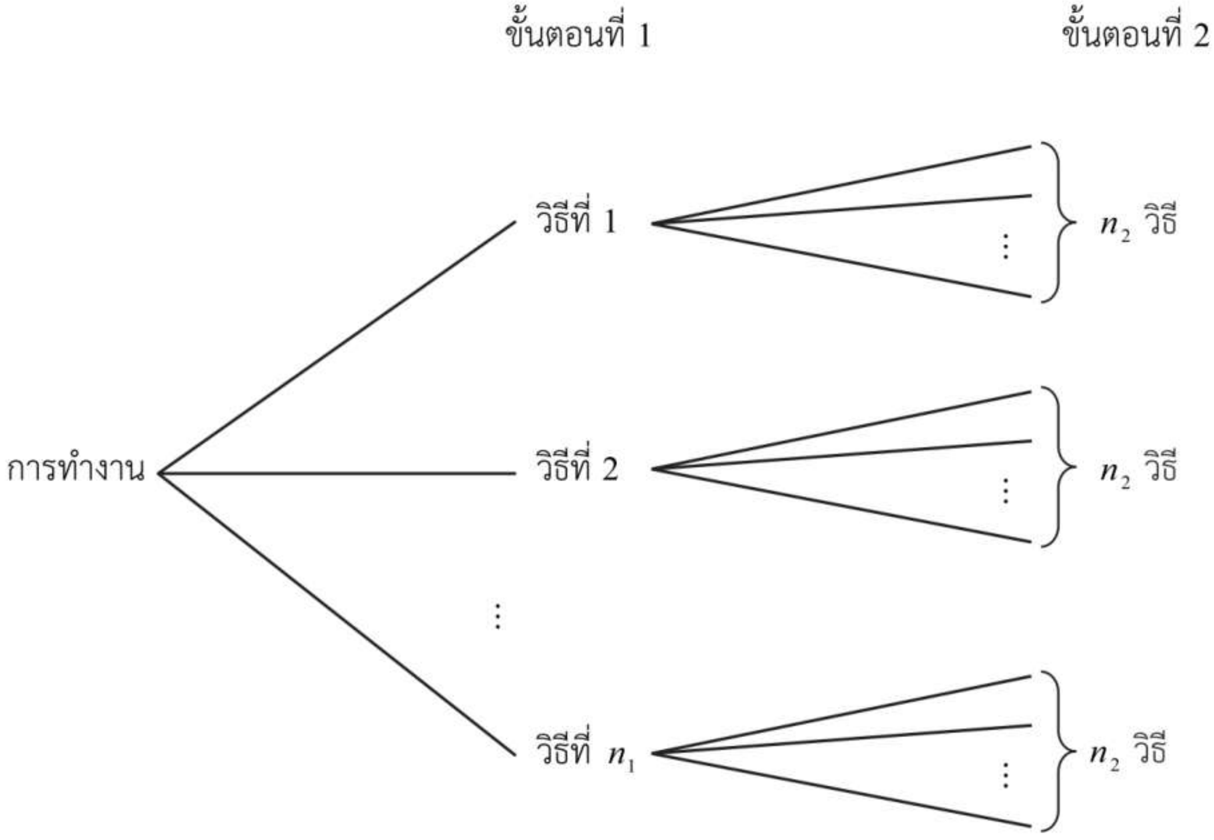
ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งขั้นตอนการทำงานออกเป็น 2 ขั้นตอน ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกัน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 สามารถทำขั้นตอนที่ 2 ต่อไปได้ n_2 วิธี

แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 \times n_2$ วิธี

สามารถอธิบายแนวคิดของหลักการคูณได้ดังแผนภาพ



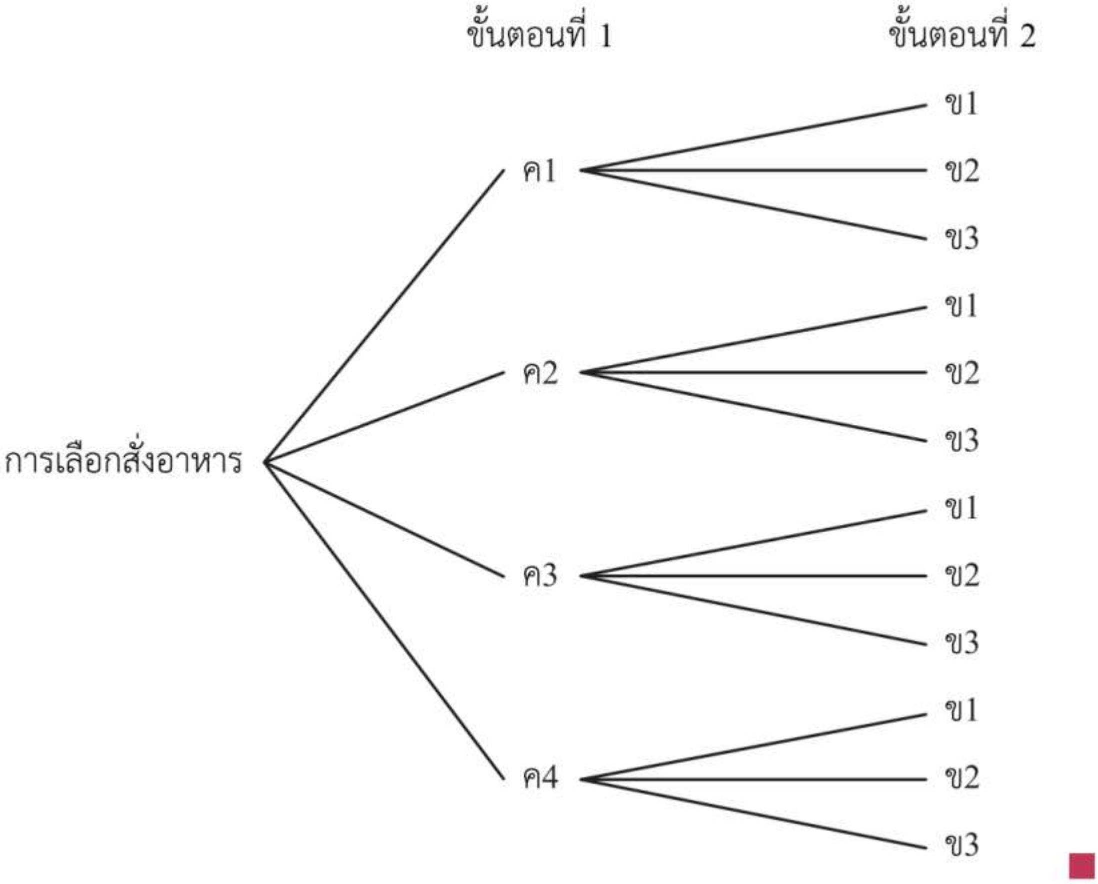
จะเห็นได้ว่า จำนวนวิธีการทำงานทั้งหมดมี $\underbrace{n_2 + n_2 + \cdots + n_2}_{n_1 \text{ ตัว}} = n_1 \times n_2$ วิธี

ตัวอย่างที่ 5

ร้านอาหารแห่งหนึ่งมีอาหารคาว 4 อย่าง และขนม 3 อย่าง ถ้าลูกค้าต้องการอาหารคาวหนึ่งอย่างและขนมหนึ่งอย่าง เขาจะสามารถเลือกสั่งอาหารได้กี่แบบ

วิธีทำ สมมติให้อาหารคาว 4 อย่าง ได้แก่ ค1, ค2, ค3 และ ค4
และขนม 3 อย่าง ได้แก่ ข1, ข2 และ ข3
ในการเลือกสั่งอาหารประกอบด้วย 2 ขั้นตอนที่ต่อเนื่องกัน คือ
ขั้นตอนที่ 1 เลือกอาหารคาว ซึ่งเลือกได้ 4 แบบ
ขั้นตอนที่ 2 เลือกขนม ซึ่งเลือกได้ 3 แบบ

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า ลูกค้าสามารถเลือกสั่งอาหารได้ทั้งหมด $4\times 3=12$ แบบ ซึ่งเขียนแผนภาพแสดงการเลือกสั่งอาหารได้ดังนี้



จากตัวอย่างข้างต้น ได้พิจารณาขั้นตอนการเลือกอาหารคาวก่อนการเลือกขนม อย่างไรก็ตาม อาจจะพิจารณาขั้นตอนการเลือกขนมก่อนการเลือกอาหารคาวก็ได้ เพียงแต่ต้องพิจารณาให้ครบทุกขั้นตอนเท่านั้น

ในกรณีทั่วไป การทำงานอย่างหนึ่ง อาจประกอบด้วยขั้นตอนย่อยมากกว่า 2 ขั้นตอน ซึ่งการนับจำนวนวิธีการทำงาน สามารถใช้กรณีทั่วไปของหลักการคูณ ดังนี้

หลักการคูณ (กรณีทั่วไป)

ในการทำงานอย่างหนึ่ง ถ้าสามารถแบ่งขั้นตอนการทำงานออกเป็น k ขั้นตอน ซึ่งต้องทำต่อเนื่องกัน โดยที่

ขั้นตอนที่ 1 สามารถทำได้ n_1 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 สามารถทำขั้นตอนที่ 2 ต่อไปได้ n_2 วิธี

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 และขั้นตอนที่ 2 สามารถทำขั้นตอนที่ 3 ต่อไปได้ n_3 วิธี

$\vdots$

ในแต่ละวิธีของขั้นตอนที่ 1 ถึงขั้นตอนที่ $k-1$ สามารถทำขั้นตอนที่ k ต่อไปได้ n_k วิธี

แล้วจะสามารถทำงานนี้ได้ทั้งหมด $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ วิธี

สังเกตว่า หลักการคูณมีความแตกต่างจากหลักการบวกอยู่ประการหนึ่งคือ หลักการบวกใช้นับจำนวนวิธีการทำงานโดยการแบ่งกรณี ซึ่งการทำงานในแต่ละกรณีจะทำให้ได้งานที่เสร็จสมบูรณ์ ในขณะที่หลักการคูณใช้นับจำนวนวิธีการทำงานซึ่งแบ่งออกเป็นหลายขั้นตอน โดยการทำงานเพียงขั้นตอนใดขั้นตอนหนึ่ง ยังไม่ทำให้ได้งานที่เสร็จสมบูรณ์ แต่ต้องทำงานจนครบทุกขั้นตอน จึงจะทำให้งานนั้นเสร็จสิ้น

ตัวอย่างที่ 6

ชายคนหนึ่งมีเสื้อ 6 แบบ กางเกง 3 แบบ และเนคไท 5 แบบ ถ้าชายคนนี้แต่งตัวออกจากบ้านโดยใส่เสื้อ กางเกง และผูกเนคไทแล้ว ชายคนนี้จะสามารถแต่งตัวได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ การแต่งตัวของชายคนนี้ มี 3 ขั้นตอน คือ

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อได้ 6 แบบ

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกางเกงได้ 3 แบบ

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเนคไทได้ 5 แบบ

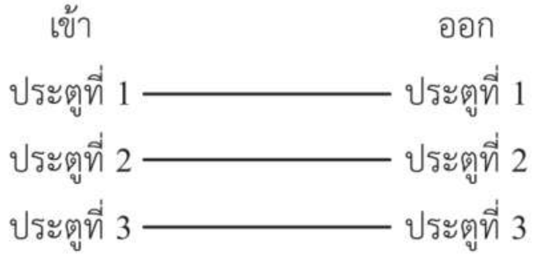
ดังนั้น ชายคนนี้จะสามารถแต่งตัวได้ $6 \times 3 \times 5 = 90$ แบบ ■

ตัวอย่างที่ 7

นักเรียน 3 คน ต้องการเข้าและออกห้องประชุมห้องหนึ่งซึ่งมีประตู 3 บาน โดยนักเรียนคนที่ 1 เข้าและออกโดยใช้ประตูบานเดียวกัน นักเรียนคนที่ 2 เข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม และนักเรียนคนที่ 3 เข้าและออกโดยใช้ประตูบานใดก็ได้ จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนทั้งสามคนจะเข้าและออกห้องประชุมนี้

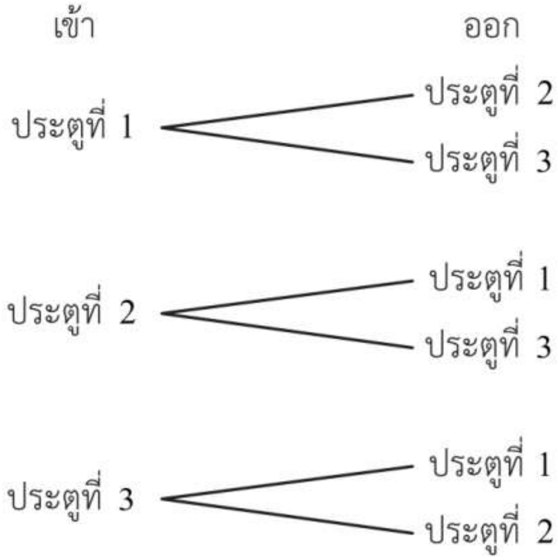
วิธีทำ จากเงื่อนไขที่กำหนด สามารถหาจำนวนวิธีเข้าและออกจากห้องประชุมสำหรับนักเรียนแต่ละคนได้ดังนี้

นักเรียนคนที่ 1



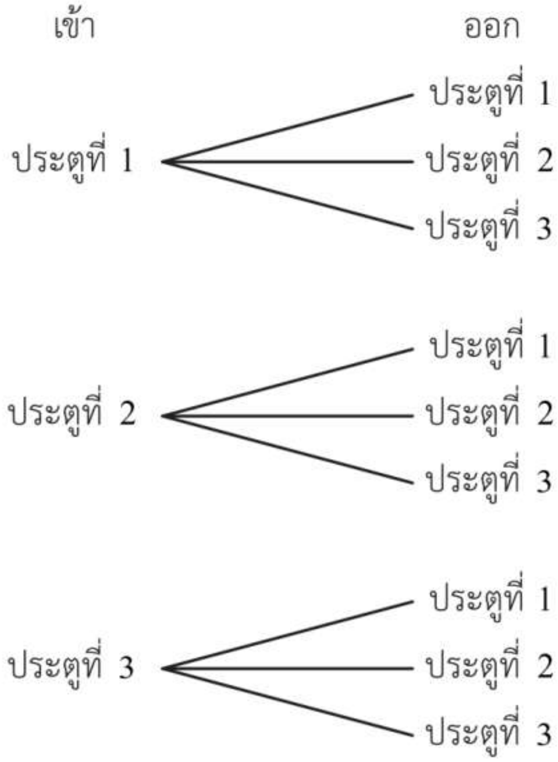
ดังนั้น นักเรียนคนที่ 1 มีวิธีเข้าและออกจากห้องประชุมได้ 3 วิธี

นักเรียนคนที่ 2



ดังนั้น นักเรียนคนที่ 2 มีวิธีเข้าและออกจากห้องประชุมได้ 6 วิธี

นักเรียนคนที่ 3



ดังนั้น นักเรียนคนที่ 3 มีวิธีเข้าและออกจากห้องประชุมได้ 9 วิธี

จากหลักการคูณ จะได้ว่าจำนวนวิธีที่นักเรียนทั้งสามคนเข้าและออกห้องประชุมมีทั้งหมด $3 \times 6 \times 9 = 162$ วิธี ■

ตัวอย่างที่ 8

ต้องการสร้างจำนวนที่มีสามหลักจากเลขโดด 2, 4, 6, 7, 8 โดยที่แต่ละหลักใช้เลขโดดไม่ซ้ำกัน จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ การสร้างจำนวนที่มีสามหลัก ทำได้โดยเลือกเลขโดดจากที่กำหนดให้เขียนในหลักหน่วย หลักสิบ และหลักร้อย โดยจะเขียนหลักใดก่อนก็ได้



การสร้างจำนวนแบ่งได้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว เป็นหลักหน่วย ได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากที่เหลือเป็นหลักสิบ ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากที่เหลือเป็นหลักร้อย ได้ 3 วิธี

ดังนั้น จำนวนสามหลักที่ต้องการมีทั้งหมด $5 \times 4 \times 3 = 60$ จำนวน ■

ตัวอย่างที่ 9

สมมติว่าหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร ประกอบด้วยเลขโดด 1 ตัว ที่ไม่ใช่ 0 ตามด้วยพยัญชนะไทย 2 ตัว และจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 4 หลัก 1 จำนวน โดยพยัญชนะที่นำมาใช้กำหนดหมายเลขทะเบียนรถยนต์ มีเพียง 35 ตัว (พยัญชนะที่ไม่นำมาใช้ มี 9 ตัว ได้แก่ ข ฅ ฃ ฎ ฑ ป ฝ ฟ ห) จงหาว่าหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานครจะมีได้ไม่เกินกี่หมายเลข

วิธีทำ หมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร มีองค์ประกอบ 3 ส่วน ได้แก่

ส่วนที่ 1 เลขโดดที่ไม่ใช่ 0 มีได้ 9 ตัว ได้แก่ $1, 2, 3, \dots, 9$

ส่วนที่ 2 พยัญชนะ 2 ตัว มีได้ 35×35 แบบ

ส่วนที่ 3 จำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 4 หลัก มีได้ 9,999 จำนวน

จากหลักการคูณ จะได้ว่าหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร จะมีได้ไม่เกิน $9 \times 35 \times 35 \times 9,999 = 110,238,975$ หมายเลข ■

ตัวอย่างที่ 10

มีจดหมายที่แตกต่างกัน 3 ฉบับ และมีตู้จดหมายที่แตกต่างกัน 4 ตู้ จะมีวิธีนำจดหมายไปใส่ในตู้ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การนำจดหมาย 3 ฉบับ ไปใส่ในตู้จดหมาย 4 ตู้ ประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำจดหมายฉบับที่ 1 ไปใส่ในตู้ใดตู้หนึ่ง ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำจดหมายฉบับที่ 2 ไปใส่ในตู้ใดตู้หนึ่ง ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 นำจดหมายฉบับที่ 3 ไปใส่ในตู้ใดตู้หนึ่ง ทำได้ 4 วิธี

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า จะนำจดหมายไปใส่ในตู้ได้ทั้งหมด $4 \times 4 \times 4 = 64$ วิธี ■

ตัวอย่างที่ 11

มีตู้จดหมายที่แตกต่างกัน 4 ตู้ และมีสี 3 สี คือ สีเขียว สีเหลือง และสีแดง ถ้าต้องการทาสีตู้จดหมายตู้ละหนึ่งสี แล้วจะทาสีตู้จดหมายได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ การเลือกสีสำหรับตู้จดหมาย 4 ตู้ ประกอบด้วย 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกสีสำหรับทาตู้ที่ 1 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกสีสำหรับทาตู้ที่ 2 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกสีสำหรับทาตู้ที่ 3 ได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกสีสำหรับทาตู้ที่ 4 ได้ 3 วิธี

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า จะทาสีตู้จดหมายได้ทั้งหมด $3\times3\times3\times3=81$ แบบ ■

สังเกตว่า ในตัวอย่างที่ 10 ขั้นตอนการทำงานขึ้นอยู่กับจดหมายแต่ละฉบับว่าจะนำไปใส่ในตู้ใด แต่ในตัวอย่างที่ 11 ขั้นตอนการทำงานขึ้นอยู่กับตู้จดหมายแต่ละตู้ว่าจะทาสีด้วยสีใด

ตัวอย่างที่ 12

ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดแสดง เสื้อ กระโปรง และกางเกง ของสตรี โดยใช้หุ่นโชว์หน้าร้าน ถ้าห้างสรรพสินค้าดังกล่าวมีเสื้อ 12 แบบ กระโปรง 8 แบบ และกางเกง 6 แบบ โดยที่กระโปรงและกางเกงจะไม่ใส่พร้อมกัน จะมีวิธีในการจัดชุดเสื้อผ้าสำหรับหุ่นโชว์ได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การจัดชุดเสื้อผ้าสำหรับหุ่นโชว์ ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเสื้อให้หุ่นโชว์ ทำได้ 12 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกระโปรงหรือกางเกงให้หุ่นโชว์ ซึ่งต้องเลือกอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น โดยใช้หลักการบวก ทำได้ $8+6$ ซึ่งเท่ากับ 14 วิธี

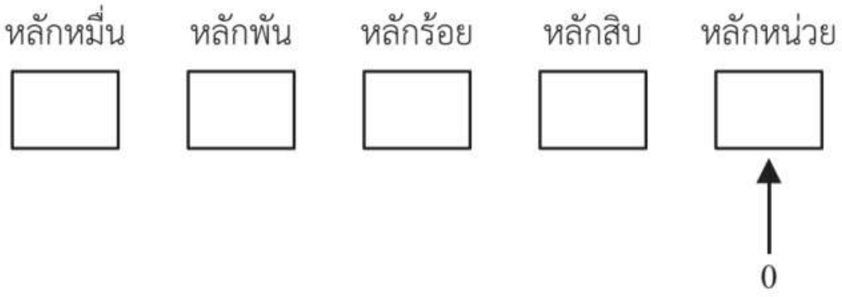
จากหลักการคูณ จึงได้ว่า จะมีวิธีในการจัดชุดเสื้อผ้าสำหรับหุ่นโชว์ทั้งหมด $12\times14=168$ วิธี ■

ตัวอย่างที่ 13

ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกห้าหลักที่เป็นจำนวนคู่ โดยที่แต่ละหลักใช้เลขโดดไม่ซ้ำกัน จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

วิธีทำ การสร้างจำนวนเต็มบวกดังกล่าวสามารถแบ่งได้ 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หลักหน่วยเป็นเลขโดด 0

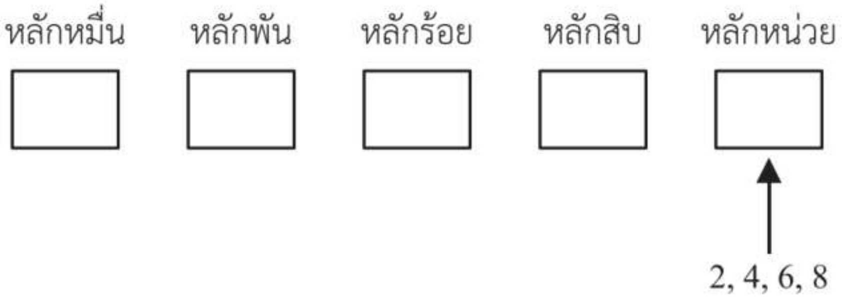


การสร้างจำนวนแบ่งได้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 0 เป็นหลักหน่วย ได้ 1 วิธี
ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักสิบ ได้ 9 วิธี
ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักร้อย ได้ 8 วิธี
ขั้นตอนที่ 4 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักพัน ได้ 7 วิธี
ขั้นตอนที่ 5 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักหมื่น ได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนที่สร้างได้กรณีนี้มีทั้งหมด $1\times 9\times 8\times 7\times 6=3{,}024$ จำนวน

กรณีที่ 2 หลักหน่วยเป็นเลขโดด 2, 4, 6 หรือ 8



การสร้างจำนวนแบ่งได้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดด 2, 4, 6 หรือ 8 เป็นหลักหน่วย ได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่ไม่ใช่ 0 และเลขโดดที่ไม่ซ้ำกับหลักหน่วย เป็นหลักหมื่น ได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 3 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักพัน ได้ 8 วิธี

ขั้นตอนที่ 4 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักร้อย ได้ 7 วิธี

ขั้นตอนที่ 5 เลือกเลขโดด 1 ตัว จากเลขโดดที่เหลือเป็นหลักสิบ ได้ 6 วิธี

ดังนั้น จำนวนที่สร้างได้กรณีนี้มีทั้งหมด $4\times8\times8\times7\times6=10,752$ จำนวน

จะได้ จำนวนเต็มบวกห้าหลักที่ต้องการมีทั้งหมด $3,024+10,752=13,776$ จำนวน ■

กิจกรรม : บทพากย์เอราวัณ

บทพากย์เอราวัณ จากพระราชนิพนธ์เรื่องรามเกียรติ์ ในพระบาทสมเด็จพระพุทธเลิศหล้านภาลัย เป็นกาพย์ฉบัง 16 ซึ่งบรรยายลักษณะของช้างเอราวัณ พาหนะของพระอินทร์ ซึ่งช้างในบทพากย์นี้เกิดจากการเนรมิตของอินทรชิต เพื่อหลอกล่อกองทัพของพระราม โดยส่วนหนึ่งของบทพากย์เป็นดังนี้

ช้างนิรมิตฤทธิแรงแข็งขัน　　เผือกผ่องผิวพรรณ
สีสังข์สะอาดโอฬาร์
สามสิบสามเศียรโสภา　　เศียรหนึ่งเจ็ดงา
ดั่งเพชรรัตน์รูจี
งาหนึ่งเจ็ดโบกขรณี　　สระหนึ่งย่อมมี
เจ็ดกออุบลบันดาล
กอหนึ่งเจ็ดดอกดวงมาลย์　　ดอกหนึ่งแบ่งบาน
มีกลีบได้เจ็ดกลีบผกา
กลีบหนึ่งมีเทพธิดา　　เจ็ดองค์โสภา
แน่งน้อยลำเพานงพาล
นางหนึ่งย่อมมีบริวาร　　อีกเจ็ดเยาวมาลย์
ล้วนรูปนิรมิตมารยา

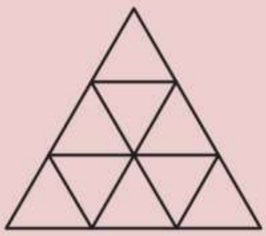
ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้ โดยใช้ข้อมูลจากบทพากย์ข้างต้น

1. ช้างเอราวัณมีกี่เศียร
2. เศียรช้างเอราวัณแต่ละเศียรมีงากี่กิ่ง และช้างเอราวัณมีงารวมทั้งหมดกี่กิ่ง
3. งาแต่ละกิ่งมีสระบัวกี่สระ และช้างเอราวัณมีสระบัวรวมทั้งหมดกี่สระ
4. สระบัวแต่ละสระมีกอบัวกี่กอ และช้างเอราวัณมีกอบัวรวมทั้งหมดกี่กอ
5. กอบัวแต่ละกอมีดอกบัวกี่ดอก และช้างเอราวัณมีดอกบัวรวมทั้งหมดกี่ดอก
6. ดอกบัวแต่ละดอกมีกี่กลีบ และช้างเอราวัณมีกลีบดอกบัวรวมทั้งหมดกี่กลีบ
7. กลีบดอกบัวแต่ละกลีบมีเทพธิดากี่องค์ และช้างเอราวัณมีเทพธิดารวมทั้งหมดกี่องค์
8. เทพธิดาแต่ละองค์มีบริวารกี่นาง และช้างเอราวัณมีบริวารรวมทั้งหมดกี่นาง
9. ช้างเอราวัณมีเทพธิดาและบริวารรวมทั้งหมดกี่นาง

แบบฝึกหัด 2.1

1. เมนูของร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีอาหารไทย 12 อย่าง อาหารจีน 8 อย่าง และอาหารญี่ปุ่น 5 อย่าง ถ้าต้องการเลือกสั่งอาหาร 1 อย่าง จะสามารถเลือกสั่งอาหารได้กี่แบบ

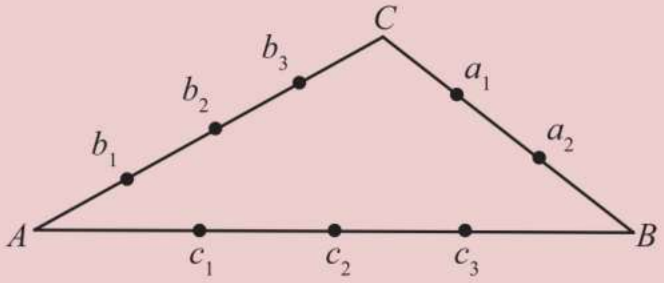
2. กมลนำกระเบื้องรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย จำนวน 9 แผ่น มาจัดเรียงชิดกัน ดังรูป



จากการจัดเรียงกระเบื้องข้างต้น มีรูปสามเหลี่ยมด้านเท่าทั้งหมดกี่รูป

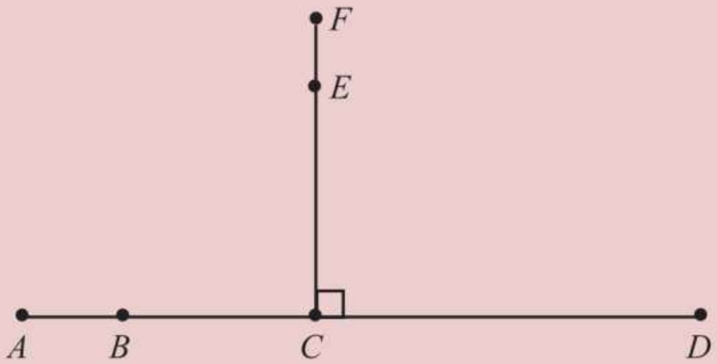
3. ห้างสรรพสินค้าแห่งหนึ่งมีประตูซึ่งเข้าและออกได้ 10 ประตู ถ้าน้อยหน่าต้องการเข้าและออกห้างสรรพสินค้าแห่งนี้ โดยไม่ใช้ประตูซ้ำกันแล้ว น้อยหน่าจะสามารถเลือกประตูเข้าออกได้กี่วิธี

4. กำหนดจุด $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2$ และ c_3 บนด้านของรูปสามเหลี่ยม ABC ดังรูป



จงหาว่าจะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดดังกล่าวเป็นจุดยอดได้กี่รูป

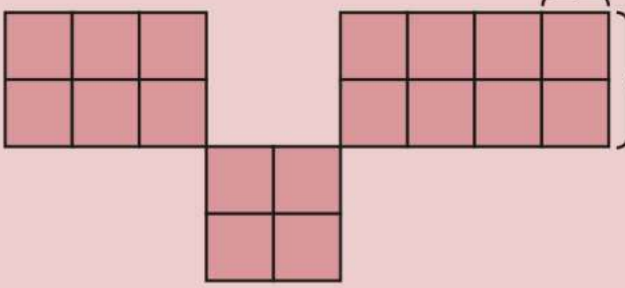
5. ให้ $\overline{AD}$ และ $\overline{FC}$ เป็นส่วนของเส้นตรงซึ่งตั้งฉากกันที่จุด C และมีจุด B และ E ดังรูป



จงหาว่า

1) จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุด A, B, C, D, E หรือ F เป็นจุดยอด ได้ทั้งหมดกี่รูป
2) จะสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีจุด A, B, C, D, E หรือ F เป็นจุดยอด ได้ทั้งหมดกี่รูป
3) จะสร้างรูปสามเหลี่ยมที่มีจุด A เป็นจุดยอด และมีจุดยอดอีกสองจุดจากจุด B, C, D, E หรือ F ได้ทั้งหมดกี่รูป

6. กำหนดกระดาษรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากขนาด 2×1 ตารางหน่วย จำนวน 9 ชิ้น จงหาจำนวนวิธีที่แตกต่างกันทั้งหมดในการวางกระดาษทั้งเก้าชิ้นลงบนตาราง ดังรูป



7. รหัสบัตรเอทีเอ็มประกอบด้วยเลขโดดจำนวน 4 ตัว จงหาจำนวนรหัสบัตรเอทีเอ็มที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน เลขโดดในหลักแรกไม่ใช่ 9 และเลขโดดในหลักสุดท้ายเป็นจำนวนคู่

8. จงหาจำนวนวิธีสร้างคำที่ไม่คำนึงถึงความหมาย ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 5 ตัว โดยที่ตัวอักษร 2 ตัว ที่ติดกันต้องแตกต่างกัน

9. จงหาว่า
   1) จำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่า 300 ที่สร้างจากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 มีทั้งหมดกี่จำนวน
   2) จำนวนเต็มบวกสามหลักที่มากกว่า 300 ที่สร้างจากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 4 และ 5 โดยเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน

10. เลขเรียกหนังสือของห้องสมุดแห่งหนึ่งประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 2 ตัว เลขโดด 3 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว และเลขโดด 2 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เช่น QA 005 B01 จงหาจำนวนเลขเรียกหนังสือทั้งหมด

11. ลูกเต๋าแต่ละลูกมี 6 หน้า โดยมีแต้ม 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 ปรากฏอยู่แต้มละหนึ่งหน้า



ถ้าทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง จงหา
1) จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งเท่ากัน
2) จำนวนวิธีที่แต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งต่างกัน
3) จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มที่ได้จากการทอดลูกเต๋าทั้งสองครั้งน้อยกว่า 10

12. จงหาว่า
1) จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลัก มีทั้งหมดกี่จำนวน
2) จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลักที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้ายไม่ซ้ำกัน มีทั้งหมดกี่จำนวน
3) จำนวนเต็มบวกที่มีสามหลักที่เลขโดดในหลักแรกและหลักสุดท้ายรวมกันได้ 10 มีทั้งหมดกี่จำนวน

13. พาลินโดรม (palindrome) หมายถึง คำที่สามารถเขียนตัวอักษรเรียงย้อนกลับจากหลังไปหน้า หรือจากขวาไปซ้าย แล้วยังคงอ่านออกเสียงได้เหมือนเดิม เช่น NOON, RADAR, REDDER จงหาว่าพาลินโดรมที่ประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 4 ตัว โดยมีความหมายหรือไม่ก็ได้ มีทั้งหมดกี่คำ

14. มีผลไม้อยู่ 4 ชนิด ได้แก่ มะละกอ ทุเรียน สับปะรด และส้มโอ ชนิดละ 1 ผล และมีตะกร้าที่แตกต่างกันอยู่ 6 ใบ ถ้าต้องการนำผลไม้ทั้งหมดใส่ตะกร้า จงหา
1) จำนวนวิธีในการนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยไม่มีเงื่อนไข
2) จำนวนวิธีในการนำผลไม้ใส่ตะกร้าโดยที่ตะกร้าแต่ละใบมีผลไม้ไม่เกิน 1 ผล

2.2 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สมมติว่า กิ่ง กาญจน์ และแก้ว ยืนเรียงแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปด้วยกันทั้งสามคน จะสามารถแจกแจงวิธียืนเรียงกันได้ทั้งหมด 6 วิธี คือ

วิธีที่ 1	กิ่ง	กาญจน์	แก้ว
วิธีที่ 2	กิ่ง	แก้ว	กาญจน์
วิธีที่ 3	กาญจน์	กิ่ง	แก้ว
วิธีที่ 4	กาญจน์	แก้ว	กิ่ง
วิธีที่ 5	แก้ว	กิ่ง	กาญจน์
วิธีที่ 6	แก้ว	กาญจน์	กิ่ง

นอกจากการแจกแจงวิธียืนทั้งหมดโดยตรงแล้ว ยังสามารถหาจำนวนวิธีการยืนเป็นแถวหน้ากระดานเพื่อถ่ายรูปของทั้งสามคนได้โดยใช้หลักการคูณ ดังนี้



เนื่องจากตำแหน่งในการยืนมี 3 ตำแหน่ง การจัดแถวเพื่อถ่ายรูปจึงประกอบด้วย 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 เลือกคนมายืนได้ 3 วิธี จาก กิ่ง กาญจน์ และแก้ว

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 เลือกคนมายืนได้ 2 วิธี จากคน 2 คนที่เหลือ

ขั้นตอนที่ 3 ตำแหน่งที่ 3 เลือกคนมายืนได้ 1 วิธี จากคนสุดท้าย

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า มีวิธีจัดแถวเพื่อถ่ายรูปทั้งหมด $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี

การจัดแถวเพื่อถ่ายรูปข้างต้นเป็นตัวอย่างของ **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น (linear permutation)** ซึ่งเป็นการนำสิ่งของมาจัดเรียงในแนวเส้นตรง โดยไม่นำสิ่งของที่ใช้จัดเรียงไปแล้วในตำแหน่งหนึ่งมาจัดเรียงในตำแหน่งอื่นอีก และการเรียงสับเปลี่ยนที่มีสิ่งของเรียงลำดับแตกต่างกัน จะถือว่าเป็นการเรียงสับเปลี่ยนที่ไม่เหมือนกัน

จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น มักอยู่ในรูปการคูณของจำนวนที่เรียงติดกัน เช่น $4\times3\times2\times1$ หรือ $1\times2\times3\times4$

ดังนั้น เพื่อความสะดวกในการเขียนในรูปการคูณดังกล่าว จะกำหนดสัญลักษณ์แฟกทอเรียล ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1

ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก
แฟกทอเรียล (factorial) n คือ การคูณของจำนวนเต็มบวกตั้งแต่ 1 ถึง n เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $n!$ (อ่านว่า "เอ็น แฟกทอเรียล")

นั่นคือ $n! = 1\times2\times3\times\cdots\times(n-1)\times n$

หรือ $n! = n\times(n-1)\times\cdots\times3\times2\times1$

และให้ $0!=1$

เช่น
$$1! = 1$$
$$2! = 2\times1 = 2$$
$$3! = 3\times2\times1 = 6$$
$$4! = 4\times3\times2\times1 = 24$$
$$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$$
$$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$$

ตัวอย่างที่ 14

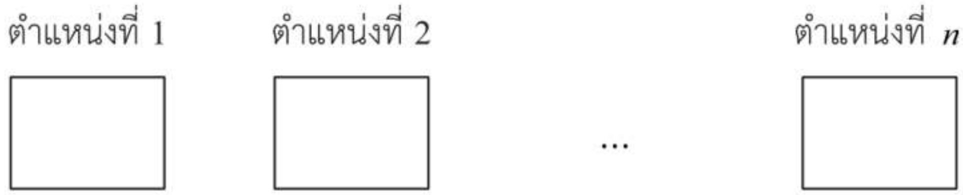
จงหาค่าของ $\dfrac{4!6!}{8!}$

วิธีทำ
$$\frac{4!6!}{8!} = \frac{4\times3\times2\times1\times6!}{8\times7\times6!}$$
$$= \frac{3}{7}$$

■

ในหัวข้อนี้ จะหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยอาศัยหลักการคูณ และเขียนจำนวนวิธีที่ได้ในรูปแฟกทอเรียล

ในกรณีทั่วไป ถ้าต้องการนำสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น สามารถหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมดได้โดยใช้หลักการคูณ ดังนี้



พิจารณาตำแหน่งของสิ่งของจากซ้ายสุดไปขวาสุด

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางได้ n วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 แต่ละวิธีที่วางสิ่งของในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี

⋮

ขั้นตอนที่ n ตำแหน่งที่ n แต่ละวิธีที่วางสิ่งของในตำแหน่งที่ 1 ถึง ตำแหน่งที่ $n-1$ มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางในตำแหน่งที่ n ได้ 1 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น เท่ากับ $n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1=n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 15

ร้านค้าต้องการนำกระเป๋ารุ่นใหม่ที่แตกต่างกัน 6 ใบ วางโชว์หน้าร้าน โดยวางเรียงกันในแนวเส้นตรง จะสามารถจัดวางกระเป๋าได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ นำกระเป๋าที่แตกต่างกัน 6 ใบ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ทำได้ทั้งหมด
$6! = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ วิธี ■

ในบางกรณี การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นอาจเป็นการนำสิ่งของที่แตกต่างกันมาจัดเรียงตามตำแหน่งต่าง ๆ โดยมีจำนวนของตำแหน่งน้อยกว่าจำนวนของสิ่งของ เช่น ถ้ามีเลขโดด $1, 2, 3, \ldots, 9$ ต้องการนำมาจัดเรียงเป็นจำนวนสองหลัก โดยที่แต่ละหลักมีเลขโดดไม่ซ้ำกัน จะมีจำนวนที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน

ปัญหาดังกล่าว สามารถแก้ได้โดยใช้หลักการคูณ ดังนี้

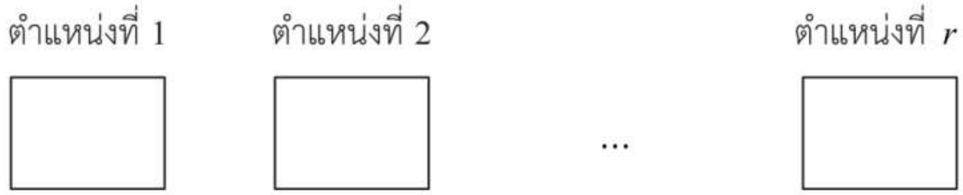


ขั้นตอนที่ 1 หลักสิบ เลือกเลขโดดได้ 9 วิธี จากเลขโดด $1, 2, 3, \ldots, 9$

ขั้นตอนที่ 2 หลักหน่วย เลือกเลขโดดได้ 8 วิธี จากเลขโดดที่เหลือ 8 ตัว

ดังนั้น จะมีจำนวนสองหลักที่เลขโดดแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมด $9 \times 8 = 72$ จำนวน

ในกรณีทั่วไป ถ้ามีสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น และต้องการนำสิ่งของ r ชิ้น จาก n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น โดยที่ $1 \le r \le n$ จะทำได้ดังนี้



พิจารณาตำแหน่งของสิ่งของจากตำแหน่งที่ 1 ถึง ตำแหน่งที่ r

ขั้นตอนที่ 1 ตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางได้ n วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ตำแหน่งที่ 2 แต่ละวิธีที่วางสิ่งของในตำแหน่งที่ 1 มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางในตำแหน่งที่ 2 ได้ $n-1$ วิธี

⋮ ⋮ ⋮

ขั้นตอนที่ r ตำแหน่งที่ r แต่ละวิธีที่วางสิ่งของในตำแหน่งที่ 1 ถึง ตำแหน่งที่ $r-1$ มีวิธีเลือกสิ่งของมาวางในตำแหน่งที่ r ได้ $n-r+1$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นเท่ากับ $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$ วิธี

ให้ $P_{n,\,r}$ แทนจำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P_{n,\,r} &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1) \\ &= n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times(n-r+1)\times\frac{(n-r)!}{(n-r)!} \\ &= \frac{n!}{(n-r)!} \end{aligned}$$

สำหรับกรณี $r=0$ หมายถึง ไม่เลือกสิ่งของออกมาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ซึ่งคิดเป็น 1 วิธี สรุปได้ว่า

> จำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น โดยที่ $0\le r\le n$ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คือ
>
> $$P_{n,\,r}=\frac{n!}{(n-r)!} \text{ วิธี}$$

ข้อสังเกต จำนวนวิธีในการนำสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น คือ $P_{n,\,n}=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 16

ร้านค้าแห่งหนึ่งมีผ้าไหมที่แตกต่างกันทั้งหมด 7 แบบ ต้องการนำผ้าไหม 3 แบบ มาจัดแสดงหน้าร้าน โดยวางเรียงในแนวเส้นตรง จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ จาก $P_{n,\,r}=\frac{n!}{(n-r)!}$

ในที่นี้ $n=7$ และ $r=3$

จะได้ $P_{7,3} = \frac{7!}{(7-3)!}$

$= \frac{7!}{4!}$

$= \frac{7\times6\times5\times4!}{4!}$

$= 7\times6\times5$

$= 210$

ดังนั้น จะนำผ้าไหม 3 แบบ จากผ้าไหม 7 แบบ มาจัดเรียงได้ทั้งหมด 210 แบบ ■

ตัวอย่างที่ 17

รหัสบัตรเอทีเอ็มประกอบด้วยเลขโดดจำนวน 4 ตัว จงหาจำนวนรหัสบัตรเอทีเอ็มทั้งหมดที่เป็นไปได้ ถ้า
1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2) ไม่ใช้เลขโดดซ้ำกัน

วิธีทำ 1) เนื่องจากรหัสบัตรเอทีเอ็มประกอบด้วยเลขโดด 4 ตัว จากหลักการคูณ จึงได้ว่า มีรหัสบัตรเอทีเอ็มได้ทั้งหมด $10\times10\times10\times10 = 10{,}000$ รหัส

2) การสร้างรหัสบัตรเอทีเอ็ม โดยไม่ใช้เลขโดดซ้ำกัน เป็นการนำเลขโดด 4 ตัว มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ดังนั้น จะสามารถสร้างรหัสบัตรเอทีเอ็มตามเงื่อนไขดังกล่าว ได้ทั้งหมด $P_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 10\times9\times8\times7 = 5{,}040$ รหัส ■

ตัวอย่างที่ 18

จะเขียนเรียงตัวอักษรในคำว่า “hyperbola” ได้กี่แบบ โดยที่ h และ y อยู่ติดกัน

วิธีทำ เนื่องจากต้องการให้ h และ y อยู่ติดกัน จะพิจารณาว่า hy เป็นตัวอักษร 1 ตัว และ yh เป็นตัวอักษร 1 ตัว

ในกรณีที่พิจารณาว่า hy เป็นตัวอักษร 1 ตัว จะได้ว่าต้องนำตัวอักษร 8 ตัวมาเรียง ได้แก่ hy, p, e, r, b, o, l, a ซึ่งเรียงได้ $P_{8,8} = 8!$ วิธี

ในกรณีที่พิจารณาว่า yh เป็นตัวอักษร 1 ตัว จะได้ว่าต้องนำตัวอักษร 8 ตัวมาเรียง ได้แก่ yh, p, e, r, b, o, l, a ซึ่งเรียงได้ $P_{8,8} = 8!$ วิธี

ดังนั้น จะเขียนเรียงตัวอักษร โดยที่ h และ y อยู่ติดกัน ได้ $8! + 8! = 80,640$ แบบ ■

ตัวอย่างที่ 19

มีหนังสือคณิตศาสตร์ต่างกัน 6 เล่ม และหนังสือเคมีต่างกัน 4 เล่ม จำนวนวิธีนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงบนชั้นหนังสือชั้นหนึ่งมีกี่วิธี โดยที่

1) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน
2) หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นวิชาเดียวกัน
3) หนังสือเคมีไม่อยู่ติดกัน

วิธีทำ 1) เนื่องจากต้องการให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน
จะพิจารณาว่าหนังสือวิชาเดียวกันมัดติดกันโดยคิดเป็นหนังสือ 1 มัด
ดังนั้น จะมีหนังสืออยู่ 2 มัด จัดเรียงได้ $2!$ วิธี
แต่ละวิธีใน $2!$ วิธีนี้ มัดที่เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ 6 เล่มนั้น จัดเรียงได้ $6!$ วิธี
และมัดที่เป็นหนังสือเคมี 4 เล่ม จัดเรียงได้ $4!$ วิธี
จะได้ว่าจำนวนวิธีจัดเรียงให้หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกันมีทั้งหมด
$2!6!4! = 34,560$ วิธี

2) เนื่องจากต้องการให้หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นวิชาเดียวกัน
จะแบ่งเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์
จัดหนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์ได้ $P_{6,2}$ วิธี
จากนั้นจัดหนังสือที่เหลือทั้งหมดไว้ระหว่างหนังสือคณิตศาสตร์ 2 เล่ม ได้ $8!$ วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือโดยที่หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์มีทั้งหมด $P_{6,2} \times 8! = \frac{6!}{4!} \times 8! = 1,209,600$ วิธี

กรณีที่ 2 หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือเคมี
จัดหนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือเคมีได้ $P_{4,2}$ วิธี
จากนั้นจัดหนังสือที่เหลือทั้งหมดไว้ระหว่างหนังสือเคมี 2 เล่ม ได้ $8!$ วิธี

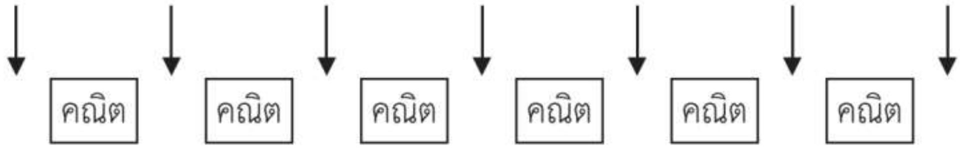
ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือโดยที่หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้าย เป็นหนังสือเคมีมีทั้งหมด $P_{4,2} \times 8! = \frac{4!}{2!} \times 8! = 483,840$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือโดยที่หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นวิชาเดียวกัน มี $1,209,600 + 483,840 = 1,693,440$ วิธี

3) เนื่องจากต้องการให้หนังสือเคมีไม่อยู่ติดกัน จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 นำหนังสือคณิตศาสตร์ 6 เล่ม มาเรียงกันได้ $6!$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 นำหนังสือเคมีไปวางแทรกระหว่างหนังสือคณิตศาสตร์ได้ 7 ตำแหน่ง



ดังนั้น จะมีวิธีนำหนังสือเคมีไปวางในตำแหน่งต่างกันได้ $P_{7,4}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีจัดหนังสือเคมีไม่ให้อยู่ติดกันมี $6! \times P_{7,4} = 6! \times \frac{7!}{3!} = 604,800$ วิธี

ตัวอย่างที่ 20

การแข่งขันวิ่งมาราธอนที่จังหวัดหนึ่งมีผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด 200 คน โดยฉัตร ญดา มงคล และมินตรา เข้าร่วมแข่งขันด้วย สมมติผู้เข้าแข่งขันทุกคนวิ่งเข้าเส้นชัยในลำดับที่แตกต่างกัน

1) จงหาจำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่ฉัตรเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 ญดาเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 59 มงคลเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 131 และมินตราเข้าเส้นชัยเป็นคนสุดท้าย
2) จงหาจำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด เมื่อฉัตร ญดา มงคล และมินตรา วิ่งเข้าเส้นชัยโดยได้อันดับที่ติดกัน
3) ถ้าการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก จงหาจำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่มินตราได้รางวัล
4) ถ้าการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก จงหาจำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยสามในสี่คนนี้ได้รางวัล

วิธีทำ 1) ฉัตรเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 ญดาเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 59 มงคลเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 131 และมินตราเข้าเส้นชัยเป็นคนสุดท้าย มีได้ 1 รูปแบบ
เหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 196 คน ซึ่งจะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ที่ไม่ใช่อันดับที่กล่าวไปแล้ว
ดังนั้น จำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่ฉัตรเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 ญดาเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 59 มงคลเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 131 และมินตราเข้าเส้นชัยเป็นคนสุดท้าย คือ 196! รูปแบบ

2) เนื่องจากฉัตร ญดา มงคล และมินตรา วิ่งเข้าเส้นชัยโดยได้อันดับที่ติดกัน ดังนั้น ให้ถือว่าทั้งสี่คนรวมกันเสมือนเป็นคนเดียวกัน ดังนั้น จะเสมือนมีผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด 197 คน ซึ่งจะได้รูปแบบการเข้าเส้นชัย 197! รูปแบบ แต่ฉัตร ญดา มงคล และมินตรา สามารถวิ่งเข้าเส้นชัยโดยสลับอันดับกันได้ ซึ่งทำได้ 4! รูปแบบ
ดังนั้น จำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด เมื่อฉัตร ญดา มงคล และมินตรา วิ่งเข้าเส้นชัยในอันดับที่ติดกัน คือ $197! \times 4!$ รูปแบบ

3) เนื่องจากการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก และมินตราได้รางวัล จะได้ว่ารูปแบบการเข้าเส้นชัยของมินตรามี 3 รูปแบบ และจะเหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 199 คน ซึ่งจะเข้าเส้นชัยเป็นอันดับใดก็ได้ จะได้รูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันที่เหลือ 199! รูปแบบ
ดังนั้น จำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่มินตราได้รางวัล คือ $3 \times 199!$ รูปแบบ

4) เนื่องจากการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก และสามในสี่คนนี้ได้รางวัล จะได้ว่าจำนวนรูปแบบที่สามในสี่คนนี้จะได้รางวัล คือ $P_{4,3} = 24$ รูปแบบ และจะเหลือผู้เข้าแข่งขันอีก 197 คน ที่ไม่ได้รับรางวัล จะได้รูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันที่เหลือ 197! รูปแบบ
ดังนั้น จำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยสามในสี่คนนี้ได้รางวัล คือ $24 \times 197!$ รูปแบบ ■

แบบฝึกหัด 2.2

1. มีหนังสือคณิตศาสตร์ต่างกัน 2 เล่ม หนังสือภาษาไทยต่างกัน 3 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษต่างกัน 4 เล่ม ถ้าต้องการนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงบนชั้นหนังสือชั้นหนึ่ง จะทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

2. จงหาค่าของ

   1) $P_{8, 4}$ 2) $P_{10, 2}$ 3) $P_{7, 3}$

   4) $P_{20, 2}$ 5) $P_{5, 5}$ 6) $P_{7, 0}$

3. ถ้า $P_{n, 4} = 18 \times P_{n-1, 2}$ จงหา n

4. จงพิสูจน์ว่า $P_{n, 1} + P_{m, 1} = P_{n+m, 1}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m และ n

5. ผู้ฝึกสอนบาสเกตบอลต้องการจัดผู้เล่น 11 คน ลงเล่นในตำแหน่งที่แตกต่างกัน 5 ตำแหน่ง จงหาจำนวนวิธีในการจัดทีมผู้เล่น ถ้าทุกคนสามารถเล่นตำแหน่งใดก็ได้

6. ต้องการสร้างจำนวน 3 หลัก จากเลขโดด 2, 3, 5 และ 9 โดยที่แต่ละหลักใช้เลขโดดไม่ซ้ำกัน จะสร้างจำนวนที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน

7. มีเก้าอี้ 6 ตัว วางเรียงในแนวเส้นตรง จงหาจำนวนวิธีที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะจัดให้คน 3 คน นั่งเก้าอี้ 6 ตัวนี้ โดยที่ไม่มีใครนั่งติดกัน

8. มีหนังสือเคมีต่างกัน 3 เล่ม หนังสือคณิตศาสตร์ต่างกัน 2 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษต่างกัน 4 เล่ม จะนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงบนชั้นหนังสือชั้นหนึ่งได้กี่แบบ โดยที่

   1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม

   2) หนังสือเล่มแรกและเล่มสุดท้ายเป็นหนังสือคณิตศาสตร์

   3) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

9. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งที่ต่างกันว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง โดยเป็นตำแหน่งสำหรับผู้ชาย 3 ตำแหน่ง และตำแหน่งสำหรับผู้หญิง 2 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้มาสมัครเข้าทำงานเป็นผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 5 คน จะมีวิธีจัดผู้ที่มาสมัครเข้าทำงานได้ทั้งหมดกี่วิธี โดยที่
   1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
   2) ชาติเป็นหนึ่งในผู้สมัครงานที่เป็นผู้ชายและชาติได้เข้าทำงาน
   3) รุ้งและหญิงเป็นสองคนในผู้สมัครงานที่เป็นผู้หญิง และรุ้งได้เข้าทำงาน แต่หญิงไม่ได้เข้าทำงาน

10. จงหาจำนวนวิธีที่จะจัดผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 3 คน ยืนเรียงแถวหน้ากระดาน โดยที่ไม่มีผู้หญิง 2 คนใดยืนติดกัน

11. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 8 เล่ม ซึ่งเป็นหนังสือภูมิศาสตร์ 3 เล่ม จะนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงเป็นแถวได้กี่แบบ โดยที่
   1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
   2) หนังสือภูมิศาสตร์ไม่อยู่ติดกัน

12. การแข่งขันปั่นจักรยานระยะทาง 50 กิโลเมตร ที่จังหวัดหนึ่ง มีผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด 100 คน โดยเทียนหอม อิงฟ้า มะตูม และปั้นจั่น เข้าร่วมแข่งขันด้วย สมมติผู้เข้าแข่งขันทุกคนเข้าเส้นชัยในลำดับที่แตกต่างกัน
   1) จงหาจำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่เทียนหอม อิงฟ้า มะตูม และปั้นจั่น เข้าเส้นชัยสี่อันดับแรก
   2) จงหาจำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่เทียนหอมเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 5 อิงฟ้า มะตูม และปั้นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่น้อยกว่าอันดับที่ 5
   3) จงหาจำนวนรูปแบบการเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยเทียนหอมและอิงฟ้าเข้าเส้นชัยห้าสิบอันดับแรก มะตูมและปั้นจั่น เข้าเส้นชัยในอันดับที่มากกว่าอันดับที่ 50
   4) ถ้าการแข่งขันนี้ให้รางวัลผู้เข้าเส้นชัยสามอันดับแรก จงหาจำนวนรูปแบบการวิ่งเข้าเส้นชัยของผู้เข้าแข่งขันทั้งหมด โดยที่เทียนหอมได้รางวัล แต่อิงฟ้าไม่ได้รางวัล

2.3 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้นของสิ่งของที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด

ถ้ามีตัวอักษรที่แตกต่างกัน 3 ตัว คือ A, B และ C จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมด $3! = 6$ วิธี คือ ABC ACB BAC BCA CAB CBA

ถ้ามีตัวอักษร 3 ตัว ที่ไม่แตกต่างกันทั้งหมด เช่น A, A และ B จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ทั้งหมดกี่วิธี
แนวคิดในการหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A และ B มีดังนี้
สมมติว่า ตัวอักษร A ทั้งสองตัวแตกต่างกัน โดยกำหนดให้เป็น A_1 และ A_2 จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยน ดังนี้

A_1A_2B $\quad$ A_1BA_2 $\quad$ BA_1A_2

A_2A_1B $\quad$ A_2BA_1 $\quad$ BA_2A_1

แต่เมื่อพิจารณาว่า A_1 และ A_2 ไม่แตกต่างกัน จะเห็นว่า

วิธีเรียงสับเปลี่ยน A_1A_2B และ A_2A_1B ไม่แตกต่างกัน ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน คือ AAB
วิธีเรียงสับเปลี่ยน A_1BA_2 และ A_2BA_1 ไม่แตกต่างกัน ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน คือ ABA
วิธีเรียงสับเปลี่ยน BA_1A_2 และ BA_2A_1 ไม่แตกต่างกัน ถือว่าเป็นวิธีเดียวกัน คือ BAA

ดังนั้น วิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A และ B มี 3 วิธี คือ

AAB $\quad$ ABA $\quad$ BAA

จากแนวคิดข้างต้น สรุปวิธีการหาจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยน ได้ดังนี้
ให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A และ B เป็น x วิธี ในแต่ละวิธีของ x วิธีนี้ ถ้าพิจารณาว่าตัวอักษร A ทั้งสองตัวต่างกัน จะมีจำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษร A ทั้งสองตัว คือ 2! วิธี ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร A, A และ B เมื่อพิจารณาว่าตัวอักษร A ทั้งสองตัวต่างกัน คือ $x \times 2!$ วิธี แต่จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของตัวอักษร 3 ตัว ที่แตกต่างกัน คือ 3! วิธี นั่นคือ $x \times 2! = 3!$
ดังนั้น $x = \frac{3!}{2!}$ วิธี

โดยทั่วไป ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้น

ในจำนวนนี้มี n_1 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 1

มี n_2 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ 2

$\vdots$

และมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k

โดยที่ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$

ให้จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ดังเงื่อนไขข้างต้น เป็น x วิธี
ในแต่ละวิธีของการเรียงสับเปลี่ยน x วิธีนี้ ถ้าพิจารณาว่า

สิ่งของในกลุ่มที่ 1 แตกต่างกันแล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มที่ 1 เป็น $n_1!$ วิธี

สิ่งของในกลุ่มที่ 2 แตกต่างกันแล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มที่ 2 เป็น $n_2!$ วิธี

$\vdots$

สิ่งของในกลุ่มที่ k แตกต่างกันแล้วมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของในกลุ่มที่ k เป็น $n_k!$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ที่แตกต่างกัน เท่ากับ $x \times n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!$ วิธี

แต่จากที่ทราบมาแล้วในหัวข้อ 2.2 ว่า จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสิ่งของ n ชิ้น ที่แตกต่างกัน เท่ากับ $n!$ วิธี

นั่นคือ $x \times n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k! = n!$

ดังนั้น $x = \dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$

สรุปได้ว่า

ถ้ามีสิ่งของ n ชิ้น ในจำนวนนี้มี n_1 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่หนึ่ง มี n_2 ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่สอง ... และมี n_k ชิ้นที่เหมือนกันเป็นกลุ่มที่ k โดยที่ $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$ แล้ว จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของ n ชิ้น ดังเงื่อนไขข้างต้น เป็น $\dfrac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$ วิธี

ตัวอย่างที่ 21

จงหาจำนวนวิธีเรียงตัวอักษรทั้งหมดในคำว่า “MATHEMATICS” โดยไม่คำนึงถึงความหมาย

วิธีทำ ในคำว่า “MATHEMATICS” มีตัวอักษรทั้งหมด 11 ตัว

มีตัวอักษร M อยู่ 2 ตัว

มีตัวอักษร A อยู่ 2 ตัว

มีตัวอักษร T อยู่ 2 ตัว

และมีตัวอักษร H, E, I, C และ S อย่างละ 1 ตัว

ดังนั้น จำนวนวิธีเรียงตัวอักษรดังกล่าว คือ $\frac{11!}{2!\,2!\,2!\,1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 4,989,600$ วิธี ■

ตัวอย่างที่ 22

มีธง 10 ผืน เป็นธงสีเหลือง 6 ผืน และธงสีฟ้า 4 ผืน ต้องการนำมาแขวนประดับริมรั้วในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยธงที่อยู่ปลายทั้งสองด้านจะต้องมีสีเดียวกัน จะสามารถจัดเรียงธงให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ โดยที่ธงสีเดียวกันถือว่าไม่แตกต่างกัน

วิธีทำ **กรณีที่ 1** ให้ธงที่อยู่ปลายทั้งสองด้านเป็นธงสีเหลือง จะจัดได้ 1 แบบ

ส่วนตรงกลางเป็นการจัดเรียงธงที่เหลือ 8 ผืน ซึ่งประกอบด้วยธงสีเหลือง 4 ผืน และธงสีฟ้า 4 ผืน จะจัดได้ $\frac{8!}{4!4!}$ แบบ

ดังนั้น จะจัดเรียงได้ทั้งหมด $1 \times \frac{8!}{4!4!} = 70$ แบบ

กรณีที่ 2 ให้ธงที่อยู่ปลายทั้งสองด้านเป็นธงสีฟ้า จะจัดได้ 1 วิธี

ส่วนตรงกลางเป็นการจัดเรียงธงที่เหลือ 8 ผืน ซึ่งประกอบด้วยธงสีเหลือง 6 ผืน และธงสีฟ้า 2 ผืน จะจัดได้ $\frac{8!}{6!2!}$ แบบ

ดังนั้น จะจัดเรียงได้ทั้งหมด $1 \times \frac{8!}{6!2!} = 28$ แบบ

จากทั้งสองกรณี สรุปได้ว่า สามารถจัดเรียงธงดังกล่าวให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันได้ทั้งหมด $70 + 28 = 98$ แบบ ■

ตัวอย่างที่ 23

การตั้งรหัสผ่านสำหรับเข้าใช้บัญชีอีเมลหนึ่งประกอบด้วยเลขโดดและตัวอักษรภาษาอังกฤษรวม 8 ตัว โดยต้องมีเลขโดดอย่างน้อย 1 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กหรือตัวพิมพ์ใหญ่อย่างน้อย 1 ตัว จงหาจำนวนรหัสผ่านทั้งหมดที่เป็นไปได้ โดยที่

1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
2) ใช้เลขโดดซ้ำ 4 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษซ้ำ 3 ตัว

วิธีทำ 1) เนื่องจากจำนวนวิธีเรียงเลขโดดและตัวอักษรภาษาอังกฤษรวม 8 ตำแหน่ง จากเลขโดด 10 ตัว ตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก 26 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ 26 ตัว คือ $(10+26+26)^8 = 62^8$ วิธี

จำนวนวิธีเรียงเลขโดด 8 ตำแหน่ง จากเลขโดด 10 ตัว คือ 10^8 วิธี

และจำนวนวิธีเรียงตัวอักษรภาษาอังกฤษ 8 ตำแหน่ง จากตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก 26 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ 26 ตัว คือ 52^8 วิธี

ดังนั้น จำนวนรหัสผ่านที่มีเลขโดดอย่างน้อย 1 ตัว และตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กหรือตัวพิมพ์ใหญ่อย่างน้อย 1 ตัว มี $62^8 - 10^8 - 52^8 = 164,880,277,053,440$ รหัส

2) เลือกเลขโดด 1 ตัว ซึ่งเลขโดดนี้จะใช้ซ้ำ 4 ตัว ได้ 10 วิธี

เลือกตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กหรือตัวพิมพ์ใหญ่ 1 ตัว ซึ่งตัวอักษรนี้จะใช้ซ้ำ 3 ตัว ได้ 52 วิธี

เลือกเลขโดดหรือตัวอักษรภาษาอังกฤษอีก 1 ตัว ได้ $9+51=60$ วิธี

นำเลขโดดและตัวอักษรภาษาอังกฤษที่เลือกทั้งแปดตัวมาจัดเรียง ได้ $\frac{8!}{4!3!1!} = 280$ วิธี

ดังนั้น จำนวนรหัสผ่านที่ตรงตามเงื่อนไขมี $10 \times 52 \times 60 \times 280 = 8,736,000$ รหัส ■

เสริมสมอง : รหัสผ่าน



รหัสผ่าน (password) ใช้สำหรับยืนยันตัวตนหรือพิสูจน์ความเป็นเจ้าของ เพื่อเข้าถึงข้อมูลส่วนบุคคลหรือเข้าใช้บริการเฉพาะบุคคล เช่น รหัสผ่านสำหรับเข้าใช้บัญชีอีเมล รหัสผ่านสำหรับเข้าใช้บริการธนาคารที่เครื่องรับจ่ายเงินอัตโนมัติ (automated teller machine: ATM) รหัสผ่านอาจประกอบด้วยอักขระที่เป็นตัวเลข และ/หรือตัวอักษร โดยควรเก็บรหัสผ่านเป็นความลับเพื่อป้องกันไม่ให้ผู้อื่นเข้าถึงข้อมูลได้ ผู้ให้บริการจึงมักมีข้อกำหนดให้ใช้รหัสผ่านที่ประกอบด้วยอักขระไม่ต่ำกว่า 8 ตัว และมีการผสมระหว่างตัวเลขและตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็กและตัวพิมพ์ใหญ่ เพื่อให้ยากต่อการคาดเดา รวมทั้งแนะนำให้เปลี่ยนรหัสผ่านบ่อย ๆ เพื่อความปลอดภัยยิ่งขึ้น นอกจากนี้ หากใส่รหัสผ่านผิดติดต่อกันเกินจำนวนครั้งที่กำหนด ระบบอาจระงับการเข้าใช้งาน เช่น หากกดรหัสบัตรเอทีเอ็มผิดติดต่อกัน 3 ครั้ง เครื่องจะยึดบัตรเอทีเอ็มโดยอัตโนมัติ

แบบฝึกหัด 2.3

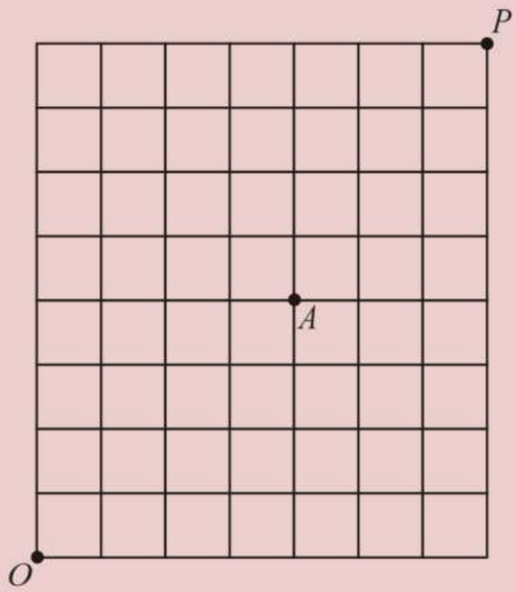
1. มีกระถางต้นมะลิ 3 กระถาง กระถางต้นกุหลาบ 2 กระถาง และกระถางต้นดาวเรือง 4 กระถาง ต้องการนำมาวางประดับริมรั้วในแนวเส้นตรงเดียวกัน จะสามารถจัดวางกระถางให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ โดยที่กระถางต้นไม้ชนิดเดียวกันถือว่าไม่แตกต่างกัน

2. ต้องการสร้างจำนวนที่มากกว่าหนึ่งล้าน จากเลขโดด 0, 2, 2, 3, 3, 3 และ 4 จะสร้างจำนวนดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่จำนวน

3. มีหลอดไฟสีขาว 4 หลอด สีแดง 5 หลอด และสีน้ำเงิน 6 หลอด ถ้าต้องการนำหลอดไฟทั้งหมดไปประดับรั้วในแนวเส้นตรง โดยถือว่าหลอดไฟสีเดียวกันไม่มีความแตกต่างกัน จงหาว่า
   1) จะมีวิธีประดับหลอดไฟได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี
   2) ถ้าหลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน จะมีวิธีประดับหลอดไฟได้กี่วิธี
   3) ถ้าหลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด จะมีวิธีประดับหลอดไฟได้กี่วิธี

4. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษรในคำว่า "CHOCOLATE" โดยไม่คำนึงถึงความหมายและตัวอักษร O ไม่อยู่ติดกัน

5. จากรูป



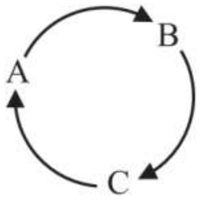
ถ้าต้องการเดินทางออกจากจุด O ไปยังจุด P โดยมีเงื่อนไขว่า จะต้องเดินทางไปทางทิศเหนือหรือทิศตะวันออกเท่านั้น จงหาจำนวนเส้นทางทั้งหมด จากจุด O ไปยังจุด P โดยที่
   1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
   2) ต้องผ่านจุด A

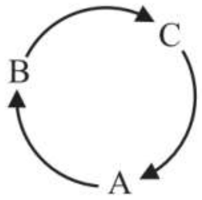
2.4 การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

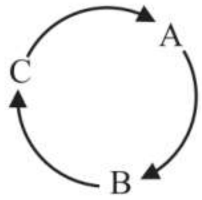
พิจารณาการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว คือ A, B และ C ในแนวเส้นตรงจะมีวิธีจัดเรียงได้ $3! = 6$ วิธี คือ

ABC	BCA	CAB
ACB	BAC	CBA

วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ABC, BCA และ CAB เป็นการจัดเรียงในแนวเส้นตรงที่แตกต่างกัน แต่ถ้านำแต่ละวิธีมาจัดเป็นวงกลม จะได้



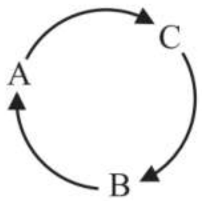




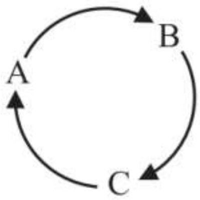
$A \rightarrow B \rightarrow C$ $\quad$ $B \rightarrow C \rightarrow A$ $\quad$ $C \rightarrow A \rightarrow B$

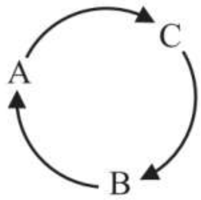
จะเห็นว่า การจัดเรียงทั้งสามแบบถือว่าเป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี เท่านั้น

ในทำนองเดียวกัน วิธีการจัดเรียงตัวอักษร ACB, BAC และ CBA เป็นการจัดเรียงเป็นวงกลมเพียง 1 วิธี คือ



ดังนั้น การจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม จะจัดได้ 2 วิธี คือ





จากรูป อาจพิจารณาว่าการจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลม ทำได้โดยให้ตัวอักษร A อยู่คงที่ แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยน B และ C ซึ่งทำได้ 2! วิธี นั่นคือ จำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษร 3 ตัว เป็นวงกลมเท่ากับ $(3-1)!$ วิธี

แนวคิดในการหาจำนวนวิธีของ **การเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลม (circular permutation)** ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น อาจจะเริ่มโดยให้สิ่งของสิ่งหนึ่งอยู่คงที่ ณ ตำแหน่งใดตำแหน่งหนึ่ง แล้วจัดเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของที่เหลืออยู่ $n-1$ ชิ้น จะได้ จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมทั้งหมดเท่ากับ $(n-1)!$ วิธี สรุปได้ว่า

จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนเชิงวงกลมของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น เท่ากับ $(n-1)!$ วิธี

ตัวอย่างที่ 24

จัดนักเรียน 10 คน ให้นั่งรอบโต๊ะกลม ซึ่งมี 10 ที่นั่ง ได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ จัดนักเรียน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลม ซึ่งมี 10 ที่นั่ง ได้แตกต่างกันทั้งหมด

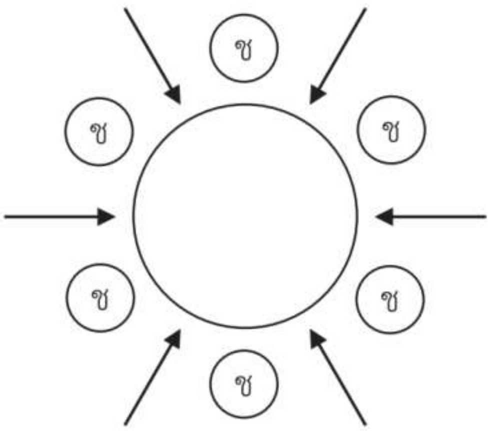
$$(10-1)! = 9!$$
$$= 362,880 \text{ แบบ}$$

■

ตัวอย่างที่ 25

มีนักเรียนชาย 6 คน และนักเรียนหญิง 6 คน ต้องการจัดนักเรียนทั้งหมดให้นั่งรอบโต๊ะกลม ซึ่งมี 12 ที่นั่ง โดยที่นักเรียนชายกับนักเรียนหญิงต้องนั่งสลับกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ จัดให้นักเรียนชาย 6 คน นั่งก่อน โดยที่นักเรียนชาย 2 คนใด ๆ ต้องไม่นั่งติดกันได้ $5!$ แบบ



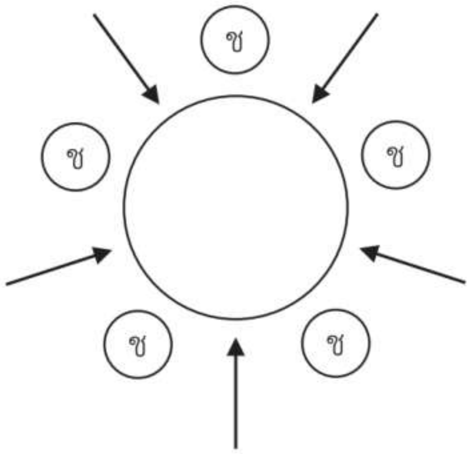
ต่อมาจัดนักเรียนหญิงให้นั่งแทรกระหว่างนักเรียนชายซึ่งมี 6 ที่นั่ง จะจัดได้ $6!$ แบบ
ดังนั้น จะจัดให้นักเรียนชายและหญิงนั่งสลับกันได้ทั้งหมด $5!6! = 86,400$ แบบ ■

หมายเหตุ ในตัวอย่างที่ 25 อาจจัดให้นักเรียนหญิง 6 คน นั่งรอบโต๊ะกลมก่อนก็ได้ ซึ่งจะได้คำตอบเท่ากัน

ตัวอย่างที่ 26

มีผู้ชาย 5 คน และผู้หญิง 4 คน ต้องการจัดคนทั้ง 9 คน ยืนเป็นวงกลมโดยไม่มีผู้หญิงสองคนใดยืนติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ จัดคนทั้ง 9 คน ยืนเป็นวงกลมโดยไม่มีผู้หญิงสองคนใดยืนติดกัน ทำได้โดยการจัดให้ผู้ชายยืนเป็นวงกลมก่อน หลังจากนั้นให้ผู้หญิงยืนแทรกระหว่างผู้ชาย ดังรูป



เนื่องจากการจัดผู้ชาย 5 คน ยืนเป็นวงกลมก่อน จัดได้ $4!$ แบบ
และตำแหน่งที่จะให้ผู้หญิงไปยืนแทรกมีทั้งหมด 5 ตำแหน่ง แต่มีผู้หญิงเพียง 4 คน
ซึ่งทำได้ $P_{5,4} = 5!$ แบบ
ดังนั้น จะจัดคนทั้ง 9 คน ยืนเป็นวงกลม โดยที่ไม่มีผู้หญิงยืนติดกัน
ได้ทั้งหมด $4!5! = 2,880$ แบบ ■

ตัวอย่างที่ 27

นำดอกไม้จำนวน 100 ดอก มาตกแต่งพาน โดยนำมาวางเรียงรอบพานซึ่งเป็นวงกลม ซึ่งในดอกไม้ 100 ดอกนี้ มีดอกกุหลาบสีขาวและสีแดงอย่างละ 1 ดอก ถ้าต้องการจัดพานให้ดอกกุหลาบทั้งสองนี้อยู่ติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

วิธีทำ ต้องการจัดพานให้ดอกกุหลาบสีขาวและสีแดงอยู่ติดกัน จะถือว่าดอกกุหลาบสองดอกนี้รวมกันเสมือนเป็นดอกไม้ดอกเดียวกัน ดังนั้น จะเสมือนมีดอกไม้ทั้งหมด 99 ดอก ซึ่งจะจัดดอกไม้รอบพานได้ $98!$ แบบ

เนื่องจากสามารถสลับตำแหน่งของดอกกุหลาบสีขาวและสีแดงได้ 2 แบบ

ดังนั้น จะจัดดอกไม้รอบพานโดยที่ดอกกุหลาบสีขาวและสีแดงอยู่ติดกันได้ $98!\times 2$ แบบ

■

แบบฝึกหัด 2.4

1. นักเรียนหญิง 4 คน และนักเรียนชาย 3 คน จะแสดงรำพัดในงานโรงเรียน ซึ่งนักเรียนแต่ละคนถือพัดที่มีสีแตกต่างกันหมด โดยที่นักเรียนหญิงหนึ่งคนอยู่ตรงกลาง ส่วนนักเรียนที่เหลือยืนล้อมเป็นวงกลมแล้วหมุนรอบคนที่อยู่ตรงกลาง จะสามารถจัดนักเรียนเพื่อทำการแสดงให้เกิดรูปแบบที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่แบบ

2. ต้องการจัดนักเรียนชาย 3 คน และนักเรียนหญิง 3 คน นั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 6 ที่นั่ง โดยที่นักเรียนชายนั่งติดกันและนักเรียนหญิงนั่งติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

3. พ่อ แม่ และลูกอีก 4 คน ไปรับประทานอาหารที่ร้านอาหารแห่งหนึ่ง ถ้าโต๊ะอาหารเป็นโต๊ะกลม ซึ่งมี 6 ที่นั่ง แล้วสมาชิกครอบครัวนี้จะนั่งได้ทั้งหมดกี่แบบ โดยที่
   1) ไม่มีข้อกำหนดเพิ่มเติม
   2) พ่อและแม่นั่งติดกัน
   3) พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน

4. ต้องการจัดนักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง 3 คน นั่งเป็นวงกลม โดยไม่ให้นักเรียนหญิงสองคนใดนั่งติดกัน จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

2.5 การจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด

สมมติว่านักเรียนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยสมาชิกทั้งหมด 4 คน ได้แก่ A, B, C และ D ถ้าต้องการเลือกตัวแทนกลุ่ม 2 คน ออกไปเล่นเกมหน้าชั้นโดยไม่สนใจลำดับในการเลือก จะทำได้กี่วิธี

เพื่อที่จะตอบคำถามดังกล่าว ก่อนอื่นจะพิจารณาจำนวนวิธีในการนำคน 2 คน จาก 4 คนนี้ มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น ซึ่งทำได้ $P_{4,2} = \frac{4!}{2!} = 12$ วิธี ดังนี้

AB	AC	AD	BC	BD	CD
BA	CA	DA	CB	DB	DC

สังเกตว่า AB และ BA ประกอบด้วยสมาชิกชุดเดียวกัน ดังนั้น ถ้าเลือกคนทั้งสองออกมาโดยไม่สนใจลำดับ การเรียงสับเปลี่ยนทั้ง 2 วิธีนี้ ถือเป็นวิธีเดียวกัน จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนของสมาชิก 2 คนใด ๆ ทำได้ $2! = 2$ วิธี

ดังนั้น วิธีการเลือกตัวแทนกลุ่ม 2 คน ออกมาโดยไม่สนใจลำดับ จึงเท่ากับ $\frac{P_{4,2}}{2!} = \frac{12}{2} = 6$ วิธี

ปัญหาข้างต้นเป็นตัวอย่างของ **การจัดหมู่ (combination)** ซึ่งคือการเลือกกลุ่มของสิ่งของ โดยไม่พิจารณาลำดับในการเลือก

ในกรณีทั่วไป จำนวนวิธีในการเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น จะเท่ากับ

$$\frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ วิธี}$$

ให้ $C_{n,r}$ หรือ $\binom{n}{r}$ แทนจำนวนวิธีเลือกสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น ซึ่งคือจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น จะได้ข้อสรุปดังต่อไปนี้

จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกันทั้งหมด n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น เมื่อ $0 \le r \le n$ คือ

$$C_{n,r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ วิธี}$$

เนื่องจาก $C_{n,r} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!}$

$= \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$= \dfrac{n!}{(n-(n-r))!(n-r)!}$

$= C_{n,n-r}$

ดังนั้น $C_{n,r} = C_{n,n-r}$

นั่นคือ จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น จะเท่ากับจำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ $n-r$ ชิ้น

ตัวอย่างที่ 28

ต้องการเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 10 คน จะเลือกได้กี่วิธี

วิธีทำ ต้องการเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 10 คน ทำได้ $C_{10,3}$ วิธี

เนื่องจาก $C_{10,3} = \dfrac{10!}{(10-3)!3!}$

$= \dfrac{10!}{7!3!}$

$= \dfrac{10\times 9\times 8}{3\times 2\times 1}$

$= 120$

ดังนั้น จะเลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 10 คน ได้ 120 วิธี ■

ตัวอย่างที่ 29

มีทีมฟุตบอล 10 ทีม ซึ่งจะทำการแข่งขันแบบพบกันหมด และสองทีมใด ๆ จะแข่งขันกันเพียงหนึ่งครั้ง จะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมดกี่ครั้ง

วิธีทำ เนื่องจากการแข่งขันแต่ละครั้งจะต้องเลือกทีมฟุตบอลมา 2 ทีม จาก 10 ทีม แต่สองทีมใด ๆ จะแข่งขันกันเพียงหนึ่งครั้ง ดังนั้น จะต้องจัดการแข่งขันทั้งหมด

$$C_{10,\,2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} = \frac{10!}{8!2!} = 45 \text{ ครั้ง}$$

■

ตัวอย่างที่ 30

ในงานเลี้ยงหนึ่งมีคน 20 คน ถ้าคนสองคนใด ๆ จับมือกันหนึ่งครั้ง จะมีการจับมือทั้งหมดกี่ครั้ง

วิธีทำ ในการจับมือแต่ละครั้งจะเลือกคน 2 คน จาก 20 คน แต่คนสองคนใด ๆ จะจับมือกันหนึ่งครั้ง ดังนั้น จะมีการจับมือกันทั้งหมด $C_{20,\,2} = \frac{20!}{(20-2)!2!} = \frac{20!}{18!2!} = 190$ ครั้ง ■

ตัวอย่างที่ 31

ถ้าต้องการเลือกกรรมการนักเรียน 9 คน ซึ่งประกอบด้วยนักเรียนชาย 5 คน และนักเรียนหญิง 4 คน จากผู้สมัครที่เป็นนักเรียนชาย 20 คน และนักเรียนหญิง 15 คน จะมีวิธีเลือกกรรมการที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การเลือกกรรมการนักเรียน สามารถทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกกรรมการที่เป็นนักเรียนชาย 5 คน จากผู้สมัครที่เป็นนักเรียนชาย 20 คน ทำได้ $C_{20,\,5}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกกรรมการที่เป็นนักเรียนหญิง 4 คน จากผู้สมัครที่เป็นนักเรียนหญิง 15 คน ทำได้ $C_{15,\,4}$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีเลือกกรรมการที่แตกต่างกันทั้งหมด

$$C_{20,\,5} \times C_{15,\,4} = \frac{20!}{15!5!} \times \frac{15!}{11!4!} = 21{,}162{,}960 \text{ วิธี}$$

■

ตัวอย่างที่ 32

นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ห้องหนึ่งมี 24 คน ถ้าต้องการเลือกนักเรียน 4 คน เพื่อเป็นกรรมการห้อง โดยมีคนหนึ่งในสี่คนนี้เป็นหัวหน้าห้อง จะมีวิธีเลือกทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ การเลือกกรรมการและหัวหน้าห้อง สามารถทำได้ดังนี้

วิธีที่ 1 ขั้นตอนที่ 1 เลือกนักเรียน 4 คน เพื่อเป็นกรรมการ ทำได้ $C_{24,\,4}$ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกนักเรียน 1 คน จากกรรมการ 4 คน เพื่อเป็นหัวหน้าห้อง ทำได้ 4 วิธี

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า มีวิธีเลือกกรรมการและหัวหน้าห้องทั้งหมด

$$C_{24,\,4} \times 4 = \frac{24!}{20!4!} \times 4 = 42,504 \text{ วิธี}$$

วิธีที่ 2 ขั้นตอนที่ 1 เลือกนักเรียน 1 คน เพื่อเป็นหัวหน้าห้อง ทำได้ 24 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 23 คนที่เหลือ เพื่อเป็นกรรมการ ทำได้ $C_{23,\,3}$ วิธี

จากหลักการคูณ จึงได้ว่า มีวิธีเลือกกรรมการและหัวหน้าห้องทั้งหมด

$$24 \times C_{23,\,3} = 24 \times \frac{23!}{20!3!} = 42,504 \text{ วิธี}$$

■

ตัวอย่างที่ 33

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลที่แตกต่างกัน 10 ลูก ต้องการหยิบลูกบอลในกล่อง 6 ลูก จะหยิบได้กี่วิธี เมื่อกำหนดเงื่อนไขการหยิบดังนี้

1) หยิบทีละ 2 ลูก โดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบครั้งถัดไป

2) หยิบทีละ 2 ลูก โดยใส่คืนก่อนจะหยิบครั้งถัดไป

วิธีทำ 1) หยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 10 ลูก ได้ $\binom{10}{2}$ วิธี

หยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 8 ลูกที่เหลือ ได้ $\binom{8}{2}$ วิธี

และหยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 6 ลูกที่เหลือ ได้ $\binom{6}{2}$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีในการหยิบทั้งหมด $\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2} = \frac{10!}{8!2!} \times \frac{8!}{6!2!} \times \frac{6!}{4!2!} = 18{,}900$ วิธี

2) หยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 10 ลูก ได้ $\binom{10}{2}$ วิธี

หยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 10 ลูก ได้ $\binom{10}{2}$ วิธี

และหยิบลูกบอล 2 ลูก จากลูกบอล 10 ลูก ได้ $\binom{10}{2}$ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีในการหยิบทั้งหมด $\binom{10}{2}\binom{10}{2}\binom{10}{2} = \frac{10!}{8!2!} \times \frac{10!}{8!2!} \times \frac{10!}{8!2!} = 91{,}125$ วิธี

ตัวอย่างที่ 34

ถุงใบหนึ่งมีลูกแก้วที่แตกต่างกัน 10 ลูก เป็นลูกแก้วสีขาว 5 ลูก สีแดง 2 ลูก และสีดำ 3 ลูก ถ้าต้องการหยิบลูกแก้วพร้อมกัน 3 ลูก โดยได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก จะหยิบได้กี่วิธี

วิธีทำ การหาจำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้ว สามารถทำได้ 2 วิธี ดังนี้

วิธีที่ 1 ต้องการหยิบได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก แบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 หยิบได้ลูกแก้วสีดำ 1 ลูก

หยิบลูกแก้วสีดำ 1 ลูก จากลูกแก้วสีดำ 3 ลูก ได้ 3 วิธี

และหยิบลูกแก้วสีอื่นอีก 2 ลูก จากลูกแก้วที่เหลือ 7 ลูก ได้ $\binom{7}{2}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบได้ลูกแก้วสีดำ 1 ลูก และสีอื่น 2 ลูก

เท่ากับ $3 \times \binom{7}{2} = 3 \times \frac{7!}{5!2!} = 63$ วิธี

กรณีที่ 2 หยิบได้ลูกแก้วสีดำ 2 ลูก

หยิบลูกแก้วสีดำ 2 ลูก จากลูกแก้วสีดำ 3 ลูก ได้ $\binom{3}{2}$ วิธี

และหยิบลูกแก้วสีอื่นอีก 1 ลูก จากลูกแก้วที่เหลือ 7 ลูก ได้ 7 วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบได้ลูกแก้วสีดำ 2 ลูก และสีอื่น 1 ลูก

เท่ากับ $\binom{3}{2}\times 7 = 3\times 7 = 21$ วิธี

กรณีที่ 3 หยิบได้ลูกแก้วสีดำ 3 ลูก

หยิบลูกแก้วสีดำ 3 ลูก จากลูกแก้วสีดำ 3 ลูก ได้ $\binom{3}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีหยิบได้ลูกแก้วสีดำ 3 ลูก เท่ากับ 1 วิธี

จะได้ จำนวนวิธีหยิบลูกแก้ว 3 ลูก โดยได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับ $63+21+1=85$ วิธี

วิธีที่ 2 เนื่องจากจำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้วทั้งหมด

= จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก

\+ จำนวนวิธีที่จะหยิบไม่ได้ลูกแก้วสีดำเลย

จะได้ จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก

= จำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้วทั้งหมด

– จำนวนวิธีที่จะหยิบไม่ได้ลูกแก้วสีดำเลย

เนื่องจากจำนวนวิธีในการหยิบลูกแก้วทั้งหมด เท่ากับ $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$ วิธี

และจำนวนวิธีที่จะหยิบไม่ได้ลูกแก้วสีดำเลย เท่ากับ $\binom{7}{3} = \frac{7!}{4!3!} = 35$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่จะหยิบได้ลูกแก้วสีดำอย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับ $120-35=85$ วิธี

■

ตัวอย่างที่ 35

นักมายากลคนหนึ่งให้อาสาสมัครเลือกหยิบไพ่พร้อมกัน 3 ใบ จากไพ่สำรับหนึ่งซึ่งมี 52 ใบ อาสาสมัครจะเลือกหยิบได้กี่แบบ โดยที่

1) หยิบได้ไพ่หมายเลขเดียวกันหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ
2) หยิบได้ไพ่โพแดง 2 ใบ
3) หยิบได้ไพ่ J จำนวน 2 ใบ และไพ่ K จำนวน 1 ใบ
4) หยิบได้ไพ่ที่มีหมายเลขแสดงจำนวนที่มากกว่า 2 แต่น้อยกว่า 9 ทั้งสามใบ
5) หยิบได้ไพ่หมายเลข 2, 3, 4, … ,10 หรือไพ่ข้าวหลามตัดทั้งสามใบ

วิธีทำ 1) เนื่องจากไพ่หนึ่งสำรับประกอบด้วยไพ่ 4 ชุด คือ โพดำ โพแดง ข้าวหลามตัด และดอกจิก โดยที่แต่ละชุดมีทั้งหมด 13 ใบ คือ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K และ A
การหยิบไพ่ให้ได้หมายเลขเดียวกันหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ สามารถทำได้ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 เลือกไพ่ที่มีหมายเลขหรือตัวอักษร 1 ตัว จาก
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q, K หรือ A ทำได้ 13 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกไพ่ 3 ชุด จากทั้งหมด 4 ชุด ทำได้ $\binom{4}{3}$ วิธี

ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาสาสมัครจะหยิบได้ไพ่หมายเลขเดียวกันหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ คือ $13\times\binom{4}{3}=13\times 4=52$ วิธี

2) เนื่องจากไพ่โพแดงมีจำนวน 13 ใบ จะได้ จำนวนวิธีที่หยิบได้ไพ่โพแดงจำนวน 2 ใบ คือ $\binom{13}{2}$ วิธี

และอีก 1 ใบเป็นไพ่อะไรก็ได้ที่ไม่ใช่โพแดงซึ่งเหลืออยู่ $52-13=39$ ใบ
จะได้ว่าจำนวนวิธีหยิบไพ่ใบสุดท้าย คือ 39 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาสาสมัครจะหยิบได้ไพ่โพแดง 2 ใบ และไพ่อีก 1 ใบ ที่ไม่ใช่ไพ่โพแดง คือ $\binom{13}{2}\times 39=\frac{13!}{11!2!}\times 39=3,042$ วิธี

3) เนื่องจากไพ่ J มีจำนวน 4 ใบ จะได้ จำนวนวิธีที่หยิบได้ไพ่ J จำนวน 2 ใบ คือ $\binom{4}{2}$ วิธี

เนื่องจากไพ่ K มีจำนวน 4 ใบ จะได้ จำนวนวิธีที่หยิบได้ไพ่ K จำนวน 1 ใบ คือ 4 วิธี
ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาสาสมัครจะหยิบได้ไพ่ J จำนวน 2 ใบ และไพ่ K จำนวน 1 ใบ
คือ $\binom{4}{2}\times 4 = \frac{4!}{2!2!}\times 4 = 24$ วิธี

4) เนื่องจากไพ่ที่มีหมายเลขแสดงจำนวนที่มากกว่า 2 แต่น้อยกว่า 9 มีทั้งหมด $6\times 4 = 24$ ใบ
ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาสาสมัครจะหยิบได้ไพ่ที่มีหมายเลขแสดงจำนวนที่มากกว่า 2 แต่น้อยกว่า 9 ทั้งสามใบ คือ $\binom{24}{3} = \frac{24!}{21!3!} = 2,024$ วิธี

5) เนื่องจากไพ่หมายเลข $2, 3, 4, \ldots, 10$ มีทั้งหมด $9\times 4 = 36$ ใบ
และไพ่ข้าวหลามตัดมีทั้งหมด 13 ใบ โดยเป็นไพ่หมายเลข $2, 3, 4, \ldots, 10$ จำนวน 9 ใบ
จะได้ว่าไพ่หมายเลข $2, 3, 4, \ldots, 10$ หรือไพ่ข้าวหลามตัด มี $36+13-9 = 40$ ใบ
ดังนั้น จำนวนวิธีที่อาสาสมัครจะหยิบได้ไพ่หมายเลข $2, 3, 4, \ldots, 10$ หรือไพ่ข้าวหลามตัดทั้งสามใบ คือ $\binom{40}{3} = \frac{40!}{37!3!} = 9,880$ วิธี ■

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาจำนวนวิธีเลือกตัวแทนนักเรียน 5 คน จากนักเรียนกลุ่มหนึ่งซึ่งมี 8 คน

2. ข้อสอบอัตนัยชุดหนึ่งมี 6 ข้อ ถ้าคำสั่งระบุว่าให้เลือกทำเพียง 4 ข้อ จงหาจำนวนวิธีในการเลือกทำข้อสอบ

3. ตะกร้าใบหนึ่งมีเงาะ 8 ผล ส้ม 4 ผล และมังคุด 2 ผล ถ้าผลไม้ชนิดเดียวกันแตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีในการเลือกหยิบผลไม้ 4 ผล จากตะกร้า โดยที่
   1) ไม่มีเงื่อนไขเพิ่มเติม
   2) หยิบได้เงาะทั้งสี่ผล
   3) ไม่ได้ส้มเลย

4. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลที่แตกต่างกัน 11 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก ถ้าต้องการหยิบลูกบอลพร้อมกัน 3 ลูก จากกล่องใบนี้ จงหาจำนวนวิธีในการหยิบลูกบอลโดยที่ได้ลูกบอลครบทุกสี

5. ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ หยิบไพ่ 2 ใบ จากสำรับ โดยหยิบไพ่ทีละใบและไม่ใส่คืนก่อนหยิบใบที่สอง จงหาจำนวนวิธีที่
   1) หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดงและใบที่สองได้ไพ่ที่มีหน้าสีดำ
   2) หยิบได้ไพ่ K ทั้งสองใบ

6. ในการเลือกกรรมการ 3 คน จากสมาชิกสโมสร 20 คน ซึ่งมีปกรณ์เป็นสมาชิกสโมสรแห่งนี้ด้วย จงหาจำนวนวิธีเลือกกรรมการ โดยที่
   1) ปกรณ์ได้รับเลือกเป็นกรรมการ
   2) มีสมาชิกสโมสร 2 คน เป็นสามีภรรยากัน และมีเพียงหนึ่งคนที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการ

7. ต้องการเลือกผู้แทน 3 คน จากคน 9 คน ซึ่งประกอบด้วยผู้ชาย 4 คน และผู้หญิง 5 คน เพื่อเข้าร่วมในคณะกรรมการชุดหนึ่ง โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 1 คน จะมีวิธีการเลือกทั้งหมดกี่วิธี

8. มีผลไม้ 6 ชนิด คือ แก้วมังกร ชมพู่ มะละกอ ละมุด ฝรั่ง และน้อยหน่า จงหาจำนวนวิธีในการเลือกผลไม้ 4 ชนิด โดยมีมะละกอและละมุดรวมอยู่ด้วย

9. กำหนดจุด 6 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีสร้างรูปหลายเหลี่ยมแนบในวงกลมโดยใช้จุดเหล่านี้เป็นจุดยอดเท่านั้น

10. ตะกร้าใบหนึ่งมีส้ม มังคุด และมะม่วงรวมกัน 10 ผล โดยที่จำนวนส้มเป็น 2 เท่าของจำนวนมังคุด และมีมะม่วงอยู่ 1 ผล ถ้าผลไม้ชนิดเดียวกันแตกต่างกันแล้ว จงหาจำนวนวิธีหยิบผลไม้จากตะกร้าใบนี้จำนวน 3 ผล โดยหยิบผลไม้ได้ชนิดละ 1 ผล

2.6 ทฤษฎีบททวินาม

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

พิจารณาการกระจายต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y \\
(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \\
(x+y)^3 &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 \\
(x+y)^4 &= x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 \\
(x+y)^5 &= x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4+y^5
\end{aligned}$$

พิจารณา $$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)\dots(x+y)}_{n \text{ วงเล็บ}}$$

ในการกระจาย $(x+y)^n$ ทำได้โดยเลือก x หรือ y อย่างใดอย่างหนึ่งของแต่ละวงเล็บมาคูณกันแล้ว นำผลคูณที่ได้มาบวกกัน เช่น เลือก y จาก 2 วงเล็บใด ๆ และเลือก x จาก $n-2$ วงเล็บที่เหลือ จะได้ พจน์ $x^{n-2}y^2$

ดังนั้น แต่ละพจน์ของการกระจาย $(x+y)^n$ จะอยู่ในรูป $x^{n-r}y^r$ เมื่อ $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$
เนื่องจาก $x^{n-r}y^r$ ประกอบด้วย x จำนวน $n-r$ ตัว และ y จำนวน r ตัว

ดังนั้น พจน์ $x^{n-r}y^r$ มีทั้งหมด $\dfrac{n!}{(n-r)!r!} = \dbinom{n}{r}$ พจน์

นั่นคือ สัมประสิทธิ์ของ $x^{n-r}y^r$ เท่ากับ $\dbinom{n}{r}$

การกระจาย $(x+y)^n$ สรุปเป็นทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบททวินาม (Binomial Theorem)

ให้ x, y เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{r}x^{n-r}y^r + \cdots + \binom{n}{n}y^n$$

เรียก $\binom{n}{r}$ โดยที่ $r \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ทวินาม (binomial coefficient)**

ตัวอย่างที่ 36

จงกระจาย $(2x-y)^5$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2x-y)^5 &= (2x+(-y))^5 \\ &= \binom{5}{0}(2x)^5 + \binom{5}{1}(2x)^4(-y) + \binom{5}{2}(2x)^3(-y)^2 \\ &\quad + \binom{5}{3}(2x)^2(-y)^3 + \binom{5}{4}(2x)(-y)^4 + \binom{5}{5}(-y)^5 \\ &= 32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3 + 10xy^4 - y^5\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 37

จงกระจาย $(2x+3y^2)^4$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2x+3y^2)^4 &= \binom{4}{0}(2x)^4+\binom{4}{1}(2x)^3(3y^2)+\binom{4}{2}(2x)^2(3y^2)^2 \\ &\quad +\binom{4}{3}(2x)(3y^2)^3+\binom{4}{4}(3y^2)^4 \\ &= (2x)^4+4(2x)^3(3y^2)+6(2x)^2(3y^2)^2+4(2x)(3y^2)^3+(3y^2)^4 \\ &= 16x^4+96x^3y^2+216x^2y^4+216xy^6+81y^8\end{aligned}$$

■

ตัวอย่างที่ 38

จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^4y^6 จากการกระจาย $(3x+4y)^{10}$

วิธีทำ จากทฤษฎีบททวินาม พจน์ที่มี x^4y^6 คือ

$$\begin{aligned}\binom{10}{6}(3x)^4(4y)^6 &= 210(3x)^4(4y)^6 \\ &= (210)3^4 4^6 x^4y^6\end{aligned}$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ของ x^4y^6 คือ $(210)3^4 4^6$ ■

ตัวอย่างที่ 39

จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

วิธีทำ จาก

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}y+\cdots+\binom{n}{n}y^n$$

แทน x และ y ด้วย 1 จะได้ว่า

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

ดังนั้น

$$2^n = \binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}$$

■

ในการกระจาย $(x+y)^n$ เมื่อ $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ สัมประสิทธิ์ของแต่ละพจน์แสดงได้ดังนี้

การกระจาย	สัมประสิทธิ์
$(x+y)^0$	$\binom{0}{0}$
$(x+y)^1$	$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$
$(x+y)^2$	$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$
$(x+y)^3$	$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$
$(x+y)^4$	$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$
$\vdots$	$\vdots$

การเรียงสัมประสิทธิ์ข้างต้น เรียกว่า **รูปสามเหลี่ยมปาสกาล (Pascal's triangle)** โดยการคำนวณหาสัมประสิทธิ์ทวินาม จะได้รูปสามเหลี่ยมปาสกาล ดังนี้

การกระจาย	สัมประสิทธิ์
$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	1 1
$(x+y)^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	1 4 6 4 1
$\vdots$	$\vdots$

ดังนั้น สามารถหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ต่าง ๆ จากการกระจาย $(x+y)^4$ ได้ โดยดูจากแถวที่ 5 ของรูปสามเหลี่ยมปาสกาล ซึ่งจะพบว่า

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

ข้อสังเกต 1. จำนวนแรกและจำนวนสุดท้ายในแต่ละแถว คือ 1 เนื่องจาก $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1$

2. ในแต่ละแถว จำนวนแต่ละจำนวนยกเว้นจำนวนแรกและจำนวนสุดท้าย จะเท่ากับผลบวกของจำนวนสองจำนวน ซึ่งปรากฏอยู่ทางซ้ายและทางขวาของจำนวนนั้น และอยู่ในแถวบนที่ติดกัน

เช่น $\binom{2}{1}=\binom{1}{0}+\binom{1}{1}$ และ $\binom{3}{2}=\binom{2}{1}+\binom{2}{2}$

โดยทั่วไป สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใด ๆ และ $0 \le r \le n$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r} &= \frac{n!}{(n-r+1)!(r-1)!}+\frac{n!}{(n-r)!\,r!} \\
&= \frac{r(n!)+(n-r+1)n!}{(n-r+1)!\,r!} \\
&= \frac{\left(r+(n-r+1)\right)n!}{(n-r+1)!\,r!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(n-r+1)!\,r!} \\
&= \binom{n+1}{r}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\binom{n+1}{r}=\binom{n}{r-1}+\binom{n}{r}$

แบบฝึกหัด 2.6

1. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการกระจาย

   1) $(2x+3y)^5$

   2) $(2x^2-y)^5$

   3) $\left(3x-\frac{2}{y}\right)^7$

   4) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)^4$

2. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ x^6y^4 จากการกระจาย $(2x+3y)^{10}$

3. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ x^5y^{16} จากการกระจาย $(x+2y^2)^{13}$

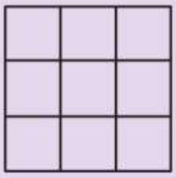
4. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ x^9y^{14} จากการกระจาย $(x^3-3y^2)^{10}$

5. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ x^7 จากการกระจาย $(2x-3)^{10}$

6. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาพจน์ที่ไม่มี x จากการกระจาย $\left(\frac{x^2}{4}-\frac{3}{x}\right)^6$

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. สมคิดนำกระเบื้องรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่แต่ละด้านยาว 1 หน่วย จำนวน 9 แผ่น มาจัดเรียงชิดกัน ดังรูป



จากการจัดเรียงกระเบื้องข้างต้น มีรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งหมดกี่รูป

2. ระหว่างท่าข้ามสองฝั่งแม่น้ำมีเรือยนต์ข้ามฟากอยู่ 3 ลำ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่ผู้โดยสารคนหนึ่งจะข้ามฟากโดยที่เที่ยวไปและเที่ยวกลับลงเรือไม่ซ้ำลำกัน

3. สนามกีฬาแห่งหนึ่งกำหนดหมายเลขที่นั่งโดยใช้ตัวเลข 1 ถึง 20 เพื่อระบุโซน ใช้ตัวอักษร A ถึง Z เพื่อระบุแถวในโซน และใช้ตัวเลข 1 ถึง 30 เพื่อระบุตำแหน่งที่นั่งในแถว จงหาจำนวนที่นั่งทั้งหมดในสนามกีฬาแห่งนี้

4. คณะผู้แทนไทยจำนวน 25 คน ไปสัมมนาที่ประเทศจีน มีเจ้าภาพมาต้อนรับ 15 คน ในเวลาต่อมาหนึ่งในคณะผู้แทนไทยมีภารกิจอื่นจึงไม่สามารถเดินทางต่อได้ คณะผู้แทนไทยที่เหลือจึงได้เดินทางไปประเทศญี่ปุ่น และมีเจ้าภาพมาต้อนรับ 10 คน ถ้าผู้แทนไทยแต่ละคนต้องทักทายเจ้าภาพทุกคน โดยจะทักทายคู่ละ 1 ครั้ง จงหาว่าจะมีการทักทายเกิดขึ้นทั้งหมดกี่ครั้ง
   1) ระหว่างผู้แทนไทยและเจ้าภาพจีน
   2) ระหว่างผู้แทนไทยและเจ้าภาพญี่ปุ่น
   3) ตลอดการเดินทาง

5. บริษัทแห่งหนึ่งกำหนดให้มีรหัสประจำตัวพนักงาน ซึ่งประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษ 1 ตัว และเลขโดด 3 ตัว ที่ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน เช่น A – 001 จงหาว่ารหัสประจำตัวของพนักงานในบริษัทนี้จะมีได้ทั้งหมดกี่รหัส ถ้า
   1) รหัสประจำตัวพนักงานมีเลขโดดที่ซ้ำกันได้
   2) รหัสประจำตัวพนักงานต้องไม่มีเลขโดดที่ซ้ำกัน

6. สมมติว่าหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานคร ประกอบด้วยเลขโดด 1 ตัวที่ไม่ใช่ 0 ตามด้วยพยัญชนะไทย 2 ตัว และจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 4 หลัก 1 จำนวน โดยพยัญชนะที่นำมาใช้กำหนดหมายเลขทะเบียนรถยนต์ มีเพียง 35 ตัว (พยัญชนะที่ไม่นำมาใช้ มี 9 ตัว ได้แก่ ข ฅ ซ ฎ ฑ ป ฝ ฟ ห) และมีหมวดหมายเลขทะเบียนที่ไม่ใช้ทั้งหมด 4 หมวด ได้แก่ งง จน ศพ ตด จงหาว่าหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลในกรุงเทพมหานครจะมีได้สูงสุดกี่หมายเลข

7. ข้อสอบประเภทให้เลือกตอบว่าจริงหรือเท็จชุดหนึ่งมี 10 ข้อ จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดที่นักเรียนคนหนึ่งจะทำข้อสอบชุดนี้ โดยจะต้องตอบคำถามครบทุกข้อ

เสริมสมอง : อักษรเบรลล์

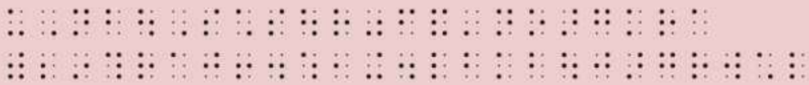


รายละเอียด
การเขียนอักษรเบรลล์

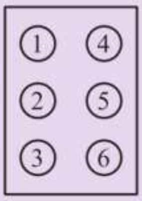
ipst.me/8451

อักษรเบรลล์ (Braille) เป็นอักษรสำหรับคนตาบอด ประดิษฐ์โดย Louis Braille (ค.ศ.1809 – 1852) ครูชาวฝรั่งเศส ผู้สูญเสียการมองเห็นจากอุบัติเหตุในวัยเด็ก อักษรเบรลล์แต่ละเซลล์มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดนูนอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งในหกตำแหน่ง

อักษรเบรลล์สามารถใช้แทนตัวอักษรในภาษาต่าง ๆ ตัวเลข สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ โน้ตดนตรี ฯลฯ โดยผู้ใช้สามารถอ่านอักษรเบรลล์ได้ด้วยการใช้นิ้วสัมผัสไปตามแต่ละเซลล์ ถ้าให้ • แทนการปรากฏของจุดนูน และ · แทนการไม่ปรากฏของจุดนูน สามารถเขียนอักษรเบรลล์แทนข้อความของกาลิเลโอ กาลิเลอี (ค.ศ. 1564 – 1642) ที่กล่าวว่า "คณิตศาสตร์เป็นอักขระที่พระเจ้าใช้ลิขิตจักรวาล" ได้เป็น



8. อักษรเบรลล์เป็นอักษรสำหรับคนตาบอด โดยอักษรเบรลล์แต่ละเซลล์มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่มีจุดนูนอย่างน้อยหนึ่งตำแหน่งในหกตำแหน่งต่อไปนี้



จงหาจำนวนรูปแบบทั้งหมดที่เป็นไปได้สำหรับแต่ละเซลล์

9. ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกสองครั้ง จงหา
   1) จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มเท่ากับเจ็ด
   2) จำนวนวิธีที่ผลรวมของแต้มไม่เท่ากับเจ็ด

10. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 6 เล่ม ต้องการนำหนังสือมา 4 เล่ม เพื่อจัดเรียงเป็นแถวบนชั้นวางหนังสือชั้นหนึ่ง จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดเรียงหนังสือ

11. ต้องการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่งจากผู้สมัคร 50 คน ซึ่งประกอบด้วยนายกสมาคม อุปนายกสมาคม เลขานุการ และเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน โดยที่กรรมการคนเดียวกันจะทำหน้าที่มากกว่า 1 ตำแหน่งไม่ได้ จะมีวิธีเลือกคณะกรรมการชุดนี้ได้ทั้งหมดกี่วิธี

12. จงหาจำนวนวิธีเรียงตัวอักษรในคำว่า “MATHEMATICS” โดยไม่คำนึงถึงความหมาย เมื่อ
   1) ตัวอักษรตัวแรกและตัวสุดท้ายเป็นสระเดียวกัน
   2) พยัญชนะเหมือนกันอยู่ติดกัน
   3) ตัวอักษรตัวแรกเป็นสระ

13. ต้องการสร้างจำนวน 6 หลัก จากเลขโดด 0, 4, 4, 5, 5 และ 5 จะสร้างจำนวนที่แตกต่างกันได้ทั้งหมดกี่จำนวน โดยที่จำนวนดังกล่าว
   1) อยู่ระหว่าง 400,000 และ 500,000
   2) มากกว่า 500,000
   3) มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่

14 ดาริกาตกแต่งร้านใหม่ โดยนำหลอดไฟสีแดง 2 หลอด สีเหลือง 3 หลอด และสีน้ำเงิน 4 หลอด มาประดับฝาผนังเป็นวงกลมโดยให้หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน ถ้าหลอดไฟแต่ละหลอดมีลวดลายต่างกันแล้ว ดาริกาจะมีวิธีจัดหลอดไฟได้ทั้งหมดกี่วิธี

15 นำหลอดไฟสีแดงที่แตกต่างกัน 3 หลอด หลอดไฟสีเขียวที่เหมือนกัน 4 หลอด หลอดไฟสีฟ้าที่เหมือนกัน 2 หลอด มาประดับรั้วหน้าบ้านในแนวเส้นตรง จะมีวิธีจัดหลอดไฟทั้งหมดกี่วิธีโดยที่หลอดไฟสีแดงอยู่ติดกัน

16 จัดนักเรียน 10 คน นั่งรอบโต๊ะกลมซึ่งมี 10 ที่นั่ง ถ้า 3 ใน 10 คนนี้ คือ กุล กั้ง และกุ้ง จะมีวิธีจัดทั้งหมดกี่วิธี โดยที่

1) กุล กั้ง และกุ้งนั่งติดกัน
2) ไม่มีสองคนใดในกุล กั้ง และกุ้ง นั่งติดกัน
☆ 3) กุลและกั้งนั่งติดกัน แต่กุ้งไม่นั่งติดกับทั้งกุลและกั้ง

17 กำหนดจุด 10 จุด บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง ถ้าต้องการลากส่วนของเส้นตรงเชื่อมจุด 2 จุด จากจุด 10 จุดนี้แล้ว จะได้ส่วนของเส้นตรงทั้งหมดกี่เส้น

18 ชมรมหมากรุกมีสมาชิกเป็นผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 4 คน จงหาจำนวนวิธีในการจับคู่เล่นหมากรุก โดยที่

1) ไม่มีเงื่อนไขใด ๆ
2) เพศตรงข้ามกันห้ามจับคู่กัน

19 ถ้าต้องการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่งจำนวน 3 คน จากคน 9 คน ซึ่งเป็นผู้ชาย 4 คน และผู้หญิง 5 คน โดยต้องมีผู้ชายอย่างน้อย 2 คน จงหาจำนวนวิธีในการเลือกคณะกรรมการชุดนี้

20 ห้องเรียนหนึ่งมีนักเรียน 40 คน ต้องการเลือกนักเรียน 10 คน มายืนเป็นวงกลม เพื่อถ่ายรูปจากมุมสูง จะจัดได้ทั้งหมดกี่แบบ

21 ฝนและฝันขับรถไปจอดในที่จอดรถซึ่งเป็นแนวเส้นตรง โดยมีที่จอดสำหรับรถ 10 คัน ถ้าฝนและฝันต้องการเว้นช่องจอดรถห่างกันหนึ่งช่อง และในขณะนั้นไม่มีรถคันอื่นอยู่เลย จะมีวิธีการจอดรถได้ทั้งหมดกี่แบบ

22 ข้อสอบวิชาคณิตศาสตร์ฉบับหนึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยจำนวน 6 ข้อ โดยข้อที่ 1 และ 6 มีคะแนนเต็มข้อละ 3 คะแนน ส่วนข้ออื่น ๆ มีคะแนนเต็มข้อละ 1 คะแนน หากนักเรียนตอบข้อใดถูกจะได้คะแนนเต็มข้อนั้น ถ้าตอบผิดจะได้ 0 คะแนน จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนจะได้คะแนนสอบ 70% พอดี

23. การแข่งขันแบดมินตันประเภทเดี่ยวประจำจังหวัดชลบุรี มีนักกีฬาเข้าร่วมแข่งขัน 12 คน ในรอบคัดเลือก โดยผู้จัดการแข่งขันแบ่งนักกีฬาเป็น 3 สาย สายละ 4 คน ซึ่งในแต่ละสายจะต้องแข่งขันแบบพบกันหมด โดยจะทำการแข่งขันวันละ 6 คู่ จากนั้นกรรมการจะรวบรวมผลคะแนนและคัดเลือกผู้ที่มีคะแนนสูงสุดและคะแนนรองลงมาในแต่ละสายเป็นผู้ผ่านเข้าแข่งขันรอบต่อไป โดยในรอบที่สองจะทำการแข่งขันเพียงวันละ 3 คู่ และเป็นการแข่งขันแบบพบกันหมด จงหาว่าการแข่งขันครั้งนี้จะต้องใช้เวลาทั้งหมดกี่วัน จึงจะได้ผู้ชนะ

24 นักท่องเที่ยว 9 คน ต้องการเดินทางไปเที่ยวน้ำตก โดยมีรถโดยสาร 3 คัน จะจัดนักท่องเที่ยวนั่งรถโดยสารได้กี่วิธี ถ้าไม่สนใจตำแหน่งที่นั่งในรถ และ

1) รถคันที่ 1, 2 และ 3 มีที่นั่งว่าง 2, 2 และ 5 ที่ ตามลำดับ

2) รถคันที่ 1, 2 และ 3 มีที่นั่งว่าง 2, 3 และ 5 ที่ ตามลำดับ

25. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 6 ลูก เป็นลูกบอลสีดำที่เหมือนกัน 3 ลูก และลูกบอลสีแดง สีขาว และสีเหลืองอย่างละ 1 ลูก จงหาจำนวนวิธีในการนำลูกบอล 4 ลูก จากกล่องใบนี้มาจัดเรียงในแนวเส้นตรง

26. ปิงปิงต้องการตั้งรหัสผ่านสำหรับเข้าใช้บัญชีอีเมลหนึ่ง โดยประกอบด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์เล็ก 8 ตัว ที่มาจากชื่อของเขา (pingping) ตามด้วยเลขโดด 2 ตัว เขาจะมีวิธีสร้างรหัสผ่านได้ทั้งหมดกี่วิธี

27. สามีและภรรยาจำนวน 5 คู่ นั่งรอบโต๊ะยาวที่มี 2 ฝั่ง ฝั่งละ 5 ที่นั่ง ในร้านอาหารแห่งหนึ่ง โดยไม่มีผู้ใดนั่งหัวโต๊ะ และแต่ละคนนั่งตรงข้ามคู่ของตน หรือนั่งถัดจากคู่ของตน จะนั่งได้ทั้งหมดกี่แบบ

28. ดารณีวางแผนว่าจะไปเที่ยว 5 จังหวัดในประเทศไทย โดยดารณีมีเพื่อนสนิทอยู่ในจังหวัดต่าง ๆ ได้แก่ ชลบุรี ระยอง ลพบุรี นครสวรรค์ เชียงราย อุบลราชธานี นครราชสีมา บึงกาฬ สงขลา ตรัง กระบี่ และกาญจนบุรี ถ้ากำหนดให้ประเทศไทยมี 76 จังหวัด จงหาจำนวนวิธีในการเลือกจังหวัดไปเที่ยวของดารณี โดยที่

1) จังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ 2 จังหวัด
2) จังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่อย่างน้อย 1 จังหวัด
3) จังหวัดที่ดารณีไปเที่ยวมีเพื่อนสนิทอยู่ทุกจังหวัด และอย่างน้อย 2 จังหวัดในนั้นอยู่ภาคตะวันออกเฉียงเหนือ

29. บุญช่วยเชื่อว่ารถยนต์ที่มีหมายเลขทะเบียนเป็นจำนวนเต็มบวก 4 หลัก ที่สร้างจากเลขโดด 0, 1, 2, 3 และ 4 โดยเมื่อนำเลขโดดทั้งสี่ตัวมารวมกัน แล้วผลรวมเป็น 9 จะเป็นรถยนต์นำโชค จงหาจำนวนหมายเลขทะเบียนรถยนต์นั่งส่วนบุคคลทั้งหมดที่บุญช่วยเชื่อว่าจะเป็นรถยนต์นำโชค

30. กำหนด $U = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ จงหา

1) จำนวนสับเซตของ U ที่มีสมาชิก 2 ตัว
2) จำนวนสับเซตของ U ที่มีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งทั้งสองจำนวนต่างกันไม่เกิน 7

31. กำหนดให้ $A = \{2, 3, 4, 5\}$ และ $S = \{f : A \to A \mid f(x) - 1 \le x\}$ จงหาจำนวนฟังก์ชันทั้งหมดที่เป็นสมาชิกของ S

⭐ 32. นักเรียนคนหนึ่งมีหนังสือนิยาย 3 เล่ม หนังสือสารคดี 2 เล่ม และหนังสือการ์ตูน 1 เล่ม โดยที่หนังสือทุกเล่มแตกต่างกัน จงหาจำนวนวิธีที่นักเรียนคนนี้หยิบหนังสือมาอ่านอย่างน้อย 1 เล่ม แล้วได้

1) หนังสือนิยาย
2) หนังสือสารคดี
3) หนังสือการ์ตูน
4) หนังสือครบทุกประเภท

33. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ $p^{12}q^{16}$ จากการกระจาย $\left(p^3-5q^2\right)^{12}$

34. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาสัมประสิทธิ์ของ x^4 จากการกระจาย $(x-1)^8+(x+1)^4-\left(x^2+1\right)^5$

35. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาพจน์ที่ไม่มี x จากการกระจาย $\left(\frac{12}{x^3}+\frac{x^2}{3}\right)^{15}$

⭐ 36. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการพิจารณาว่าระหว่าง $(1.1)^{400}$ และ 700 จำนวนใดมากกว่า

37. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาผลรวมของสัมประสิทธิ์จากการกระจาย $\left(x+y^2\right)^6$

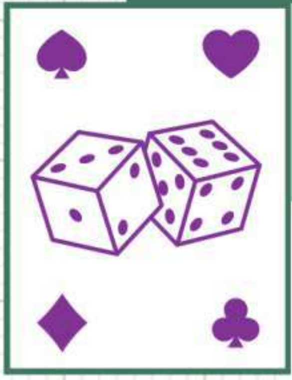
⭐ 38. จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหาเศษจากการหาร 15^{20} ด้วย 14

39. ถ้าพหุนาม $(2x+1)^n$ มีสัมประสิทธิ์ของ x^2 เป็น 312 จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหา n

⭐ 40. ถ้าผลรวมของสัมประสิทธิ์จากการกระจาย $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$ คือ 2,048 จงใช้ทฤษฎีบททวินามในการหา n

⭐ 41. กิ่งแก้วเชิญเพื่อนสนิท 10 คน มางานแต่งงาน จงหาจำนวนวิธีที่จะมีเพื่อนสนิทของกิ่งแก้วมาร่วมงานอย่างน้อย 1 คน

บทที่ 3 | ความน่าจะเป็น



3.1 การทดลองสุ่มและเหตุการณ์
3.2 ความน่าจะเป็น
3.3 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

จุดมุ่งหมาย

1. หาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์
2. ใช้ความรู้เกี่ยวกับความน่าจะเป็นในการแก้ปัญหา

บทที่ 3

ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นคือจำนวนที่บ่งบอกโอกาสที่เหตุการณ์หนึ่งจะเกิดขึ้น ความน่าจะเป็นใช้ช่วยในการตัดสินใจต่อเหตุการณ์มากมายในชีวิตประจำวัน เพื่อวางแผนการดำเนินชีวิตและปรับเปลี่ยนพฤติกรรมในการดำรงชีวิตให้ดีขึ้น ตัวอย่างเช่น ถ้าพยากรณ์อากาศบอกว่าสุดสัปดาห์นี้มีโอกาสที่ฝนจะตก 80% ของพื้นที่ อาจจะต้องวางแผนไปทำกิจกรรมในอาคารแทนที่จะไปเที่ยวในสถานที่กลางแจ้ง ในด้านธุรกิจ ความน่าจะเป็นมีความจำเป็นอย่างยิ่งในการศึกษาความเสี่ยงในการลงทุน เช่น ในการซื้อขายหุ้นในตลาดหลักทรัพย์ ผู้ลงทุนจะต้องศึกษาการดำเนินกิจการของบริษัทที่จะลงทุนว่ามีโอกาสที่จะทำกำไรมากน้อยเพียงใด ถ้าบริษัทมีผลกำไรสูงจะทำให้ผู้ถือหุ้นได้ส่วนแบ่งกำไรที่สูงด้วย ดังนั้น ถึงแม้ว่าความน่าจะเป็นจะมีต้นกำเนิดมาจากการแก้ปัญหาของการเล่นการพนัน แต่ในปัจจุบันได้มีการประยุกต์ความน่าจะเป็นในศาสตร์ที่หลากหลาย เช่น อุตุนิยมวิทยา การตัดสินใจทางธุรกิจและการเงิน การวางแผนเพื่อรองรับความเสี่ยง การคำนวณอัตราเบี้ยประกันแบบต่าง ๆ การศึกษาเกี่ยวกับพันธุกรรม การศึกษาประสิทธิภาพของยา



ความรู้ก่อนหน้า

- เซต
- หลักการนับเบื้องต้น

ipst.me/8450

3.1 การทดลองสุ่มและเหตุการณ์

การทดลองสุ่ม

การทดลองสุ่ม (random experiment) คือ การทดลองซึ่งทราบว่าผลลัพธ์อาจจะเป็นอะไรได้บ้าง แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างแน่นอนว่า ในแต่ละครั้งที่ทดลอง ผลที่เกิดขึ้นจะเป็นอะไรในบรรดาผลลัพธ์ที่อาจเป็นได้เหล่านั้น เช่น ในการทอดลูกเต๋า**หนึ่ง**ลูก**หนึ่ง**ครั้ง แต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าอาจจะเป็น 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่ไม่สามารถบอกได้อย่างแน่นอนว่า แต้มที่ได้จะเป็นแต้มใด เรียกการทอดลูกเต๋าดังกล่าวว่า การทดลองสุ่ม และเรียกเซตของแต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋าที่เป็นไปได้ทั้งหมดว่า **ปริภูมิตัวอย่าง** หรือ **แซมเปิลสเปซ (sample space)**

บทนิยาม 1

ปริภูมิตัวอย่าง คือ เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่อาจจะเป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่ม

ตัวอย่างที่ 1

จงหาปริภูมิตัวอย่างของการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่ปรากฏ

วิธีทำ การทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้งเป็นการทดลองสุ่ม เนื่องจากสามารถบอกได้ว่าผลลัพธ์ที่อาจจะเกิดขึ้นคือ แต้ม 1, 2, 3, 4, 5 หรือ 6 แต่บอกไม่ได้แน่นอนว่า เมื่อทอดลูกเต๋าแล้วจะได้แต้มใด

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ■

จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าสนใจเพียงว่าแต้มที่ได้จะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่ ผลที่ได้จากการทดลองจะเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่อย่างใดอย่างหนึ่ง ถ้าให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้ จะได้ $S = \{E, O\}$ เมื่อ E แทนแต้ม 2, 4, 6 และ O แทนแต้ม 1, 3, 5

จะเห็นว่า ในการทดลองสุ่มเดียวกันอาจเขียนปริภูมิตัวอย่างได้มากกว่าหนึ่งแบบ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับผลลัพธ์ที่สนใจ

ตัวอย่างที่ 2

จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในแต่ละข้อต่อไปนี้

1) การแข่งขันระหว่างทีมฟุตบอล ก กับทีมฟุตบอล ข โดยสนใจผลการแข่งขันของทีม ก
2) การโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสี่ครั้ง โดยสนใจจำนวนครั้งที่เหรียญจะขึ้นหัว
3) การผลิตหลอดไฟ 1,000 หลอด ใน 24 ชั่วโมง โดยสนใจจำนวนหลอดไฟที่เสียเมื่อผลิตครบ 24 ชั่วโมง
4) การหยิบลูกปิงปองหนึ่งลูกออกจากถุงซึ่งบรรจุลูกปิงปองสีขาวและสีส้ม โดยสนใจว่าได้ลูกปิงปองสีใด

วิธีทำ ให้ S_1, S_2, S_3 และ S_4 เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในข้อ 1), 2), 3) และ 4) ตามลำดับ

1) เนื่องจากในการแข่งขันฟุตบอล ผลการแข่งขันของทีม ก เป็นได้ 3 แบบ คือ ชนะ แพ้ หรือเสมอ

ดังนั้น $S_1 = \{$ชนะ, แพ้, เสมอ$\}$

2) เนื่องจากในการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสี่ครั้ง จำนวนครั้งที่เหรียญจะขึ้นหัวอาจจะเป็น 0, 1, 2, 3 หรือ 4 ครั้ง
   ดังนั้น $S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
3) เนื่องจากจำนวนหลอดไฟที่ผลิตได้ใน 24 ชั่วโมง อาจจะไม่มีหลอดไฟที่เสียหรือมีจำนวนหลอดไฟที่เสีย $1, 2, 3, \ldots, 1000$ หลอด
   ดังนั้น $S_3 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, 1000\}$
4) เนื่องจากลูกปิงปองที่อยู่ในถุงมีสองสี คือ สีขาวและสีส้ม
   ดังนั้น S_4 = {สีขาว, สีส้ม} ■

ตัวอย่างที่ 3

จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของการสังเกตวันที่ฝนตกหรือไม่ตกตั้งแต่วันที่ 1 ถึง 3 สิงหาคม พ.ศ. 2560 เมื่อสนใจจำนวนวันที่ฝนตก

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการสังเกตวันที่ฝนตกหรือไม่ตกตั้งแต่วันที่ 1 ถึง 3 สิงหาคม พ.ศ. 2560 เมื่อสนใจจำนวนวันที่ฝนตก
จะได้ $S = \{0, 1, 2, 3\}$ ■

เหตุการณ์

ในการทดลองสุ่ม เช่น การทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง เมื่อสนใจแต้มที่จะได้ ปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่ม คือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ถ้าสนใจเฉพาะแต้มที่มากกว่า 4 จะได้ว่า ผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ คือ 5 และ 6 โดยจะเรียกเซตของผลลัพธ์ที่สนใจจากการทดลองสุ่มว่า **เหตุการณ์ (event)** ถ้าให้ E คือ เหตุการณ์ในตัวอย่างนี้ จะได้ว่า $E = \{5, 6\}$ จะเห็นว่า E เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง S

บทนิยาม 2

เหตุการณ์ คือ สับเซตของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 4

ในการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มที่ได้ จงหา
1) ปริภูมิตัวอย่าง
2) เหตุการณ์ที่ได้แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว
3) เหตุการณ์ที่ได้แต้มน้อยกว่า 4
4) เหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 6
5) เหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 0

วิธีทำ 1) ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
จะได้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
2) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มซึ่งหารด้วย 3 ลงตัว
จะได้ $E_1 = \{3, 6\}$
3) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มน้อยกว่า 4
จะได้ $E_2 = \{1, 2, 3\}$
4) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 6
จะได้ $E_3 = \varnothing$
5) ให้ E_4 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 0
จะได้ $E_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ ■

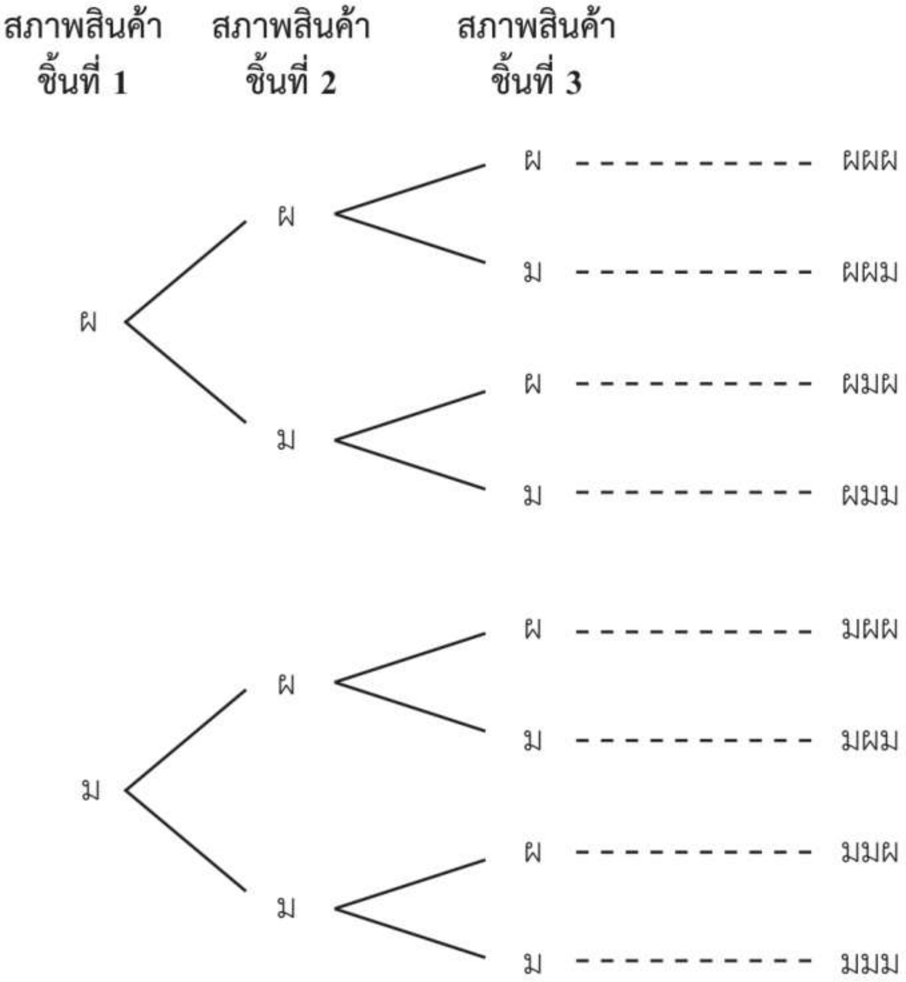
ข้อสังเกต เซตว่างและปริภูมิตัวอย่างเป็นเหตุการณ์

ตัวอย่างที่ 5

ในการตรวจสภาพของสินค้าชนิดหนึ่ง ผู้ตรวจสอบจะหยิบสินค้าขึ้นมาตรวจทีละชิ้นรวม 3 ชิ้น ผลลัพธ์ที่สนใจ คือ ผลการตรวจสภาพของสินค้าทั้งสามชิ้นว่า แต่ละชิ้นผ่านหรือไม่ผ่านมาตรฐาน จงหา
1) ปริภูมิตัวอย่าง
2) เหตุการณ์ที่มีสินค้าผ่านมาตรฐานอย่างน้อย 2 ชิ้น

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
ให้สินค้าที่ผ่านมาตรฐานแทนด้วย “ผ” และสินค้าที่ไม่ผ่านมาตรฐานแทนด้วย “ม”

สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการตรวจสภาพสินค้าทั้งสามชิ้นได้ดังนี้



1) จากแผนภาพ จะได้ $S = \{$ผผผ, ผผม, ผมผ, ผมม, มผผ, มผม, มมผ, มมม$\}$

2) ให้ E แทนเหตุการณ์ที่มีสินค้าผ่านมาตรฐานอย่างน้อย 2 ชิ้น
   จะได้ $E = \{$ผผผ, ผผม, ผมผ, มผผ$\}$ ■

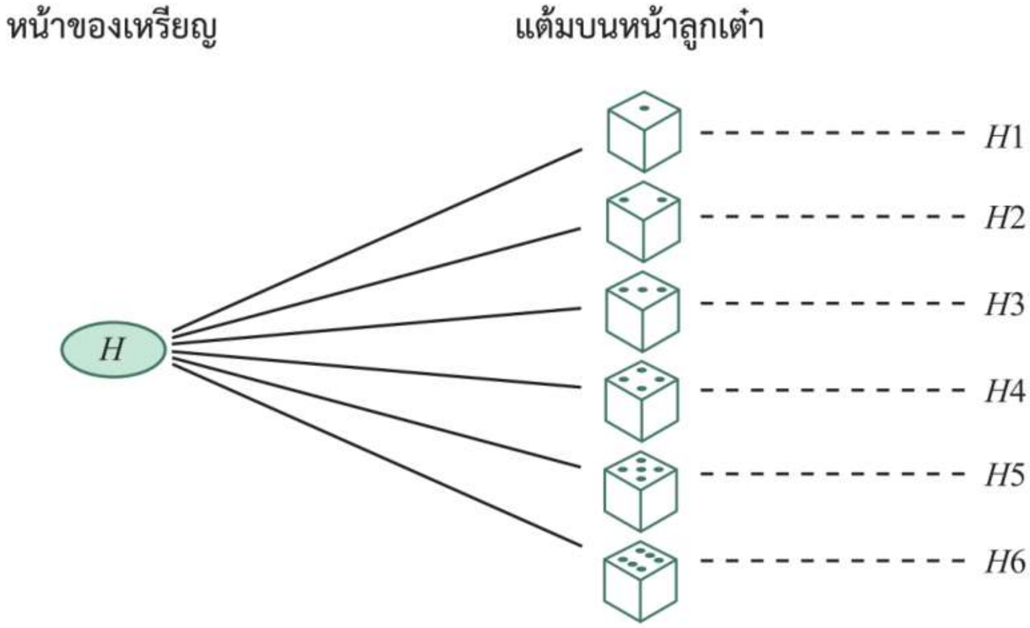
จากตัวอย่างที่ 5 ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจ คือ จำนวนชิ้นที่ไม่ผ่านมาตรฐาน โดยไม่สนใจว่าเรียงลำดับอย่างไร จะได้ว่าปริภูมิตัวอย่าง คือ $S = \{0, 1, 2, 3\}$

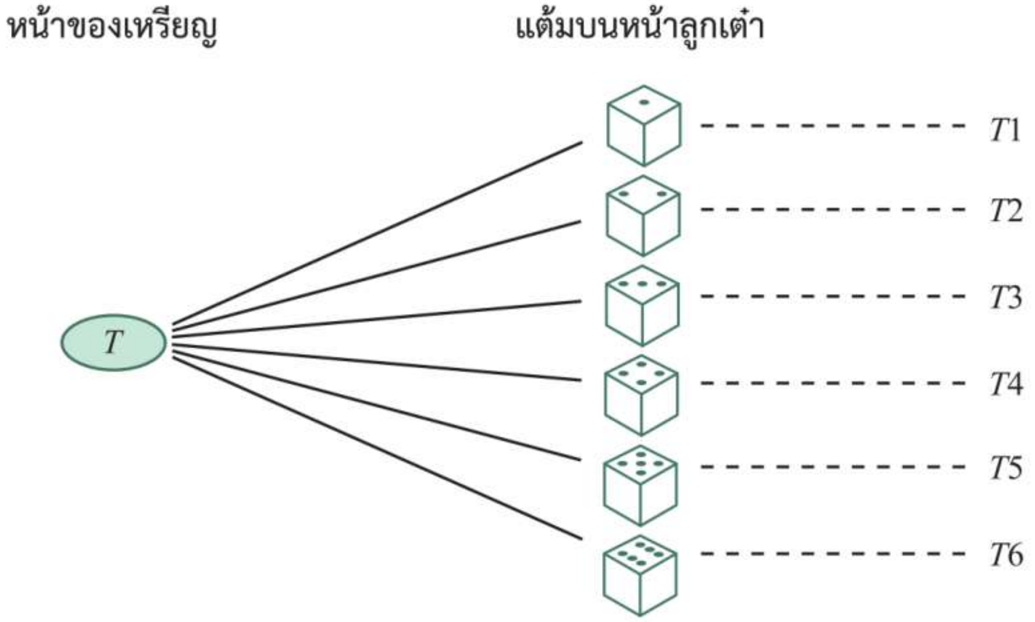
ตัวอย่างที่ 6

ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจ คือ หน้าของเหรียญและแต้มบนหน้าลูกเต๋า จงหา

1) ปริภูมิตัวอย่าง
2) เหตุการณ์ที่ได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
3) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว
4) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 6

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
H แทนเหรียญขึ้นหัว
และ T แทนเหรียญขึ้นก้อย
สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มได้ดังนี้





โดยที่สัญลักษณ์ Hi หมายถึง เหรียญขึ้นหัวและลูกเต๋าขึ้นแต้ม i
และสัญลักษณ์ Ti หมายถึง เหรียญขึ้นก้อยและลูกเต๋าขึ้นแต้ม i
เมื่อ $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1) จากแผนภาพ จะได้ $S = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$
2) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
   จะได้ $E_1 = \{H2, H4, H6, T2, T4, T6\}$
3) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัว
   จะได้ $E_2 = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$
4) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็น 6
   จะได้ $E_3 = \{T6\}$ ■

ตัวอย่างที่ 7

หยิบลูกบอลพร้อมกัน 2 ลูก ออกจากกล่องซึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว 3 ลูก และสีแดง 2 ลูก โดยที่ลูกบอลทุกลูกแตกต่างกัน ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือลูกบอลที่หยิบ จงหาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก และสีแดง 1 ลูก

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

และ E แทนเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาว 1 ลูก และสีแดง 1 ลูก

เนื่องจากการทดลองสุ่มนี้สนใจลูกบอลแต่ละลูกที่หยิบ

ดังนั้น ให้ W_1, W_2, W_3 แทนลูกบอลสีขาวลูกที่ 1, 2, 3 ตามลำดับ และ R_1, R_2 แทนลูกบอลสีแดงลูกที่ 1, 2 ตามลำดับ

จะได้ $S = \{W_1W_2, W_1W_3, W_1R_1, W_1R_2, W_2W_3, W_2R_1, W_2R_2, W_3R_1, W_3R_2, R_1R_2\}$

และ $E = \{W_1R_1, W_1R_2, W_2R_1, W_2R_2, W_3R_1, W_3R_2\}$ ■

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) การหยิบลูกอม 1 เม็ด จากถุงซึ่งบรรจุลูกอมรสส้ม รสองุ่น รสมะนาว และรสกาแฟ โดยสนใจว่าได้ลูกอมรสใด
   2) ภาคภูมิทำข้อสอบแบบถูกผิด 10 ข้อ ข้อละ 1 คะแนน โดยสนใจคะแนนสอบของภาคภูมิ
   3) การแข่งขัน 2 นัดของทีมวอลเลย์บอลไทย โดยสนใจผลการแข่งขัน
   4) การทอดลูกเต๋าสามลูกหนึ่งครั้ง โดยสนใจผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสาม
   5) นิดามีพัดลมไว้ขาย 5 เครื่อง โดยสนใจจำนวนพัดลมที่นิดาขายได้

2. ในการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสองครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือหน้าของเหรียญ จงหา
   1) ปริภูมิตัวอย่าง
   2) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวทั้งสองครั้ง
   3) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหน้าต่างกัน

3. ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ และทอดลูกเต๋า 1 ลูก พร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือหน้าของเหรียญและแต้มบนหน้าลูกเต๋า จงหาเหตุการณ์ที่
   1) เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคี่
   2) เหรียญขึ้นหัวและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
   3) แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว
   4) เหรียญขึ้นก้อยและแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ลงตัว
   5) แต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนที่หารด้วย 7 ไม่ลงตัว

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีขาว 2 ลูก โดยที่ลูกบอลทุกลูกแตกต่างกัน หยิบลูกบอล 2 ลูก ออกจากกล่อง โดยหยิบทีละลูก และใส่คืนลูกแรกก่อนจะหยิบลูกที่สอง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือลูกบอลที่หยิบ จงหาปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวทั้งสองครั้ง

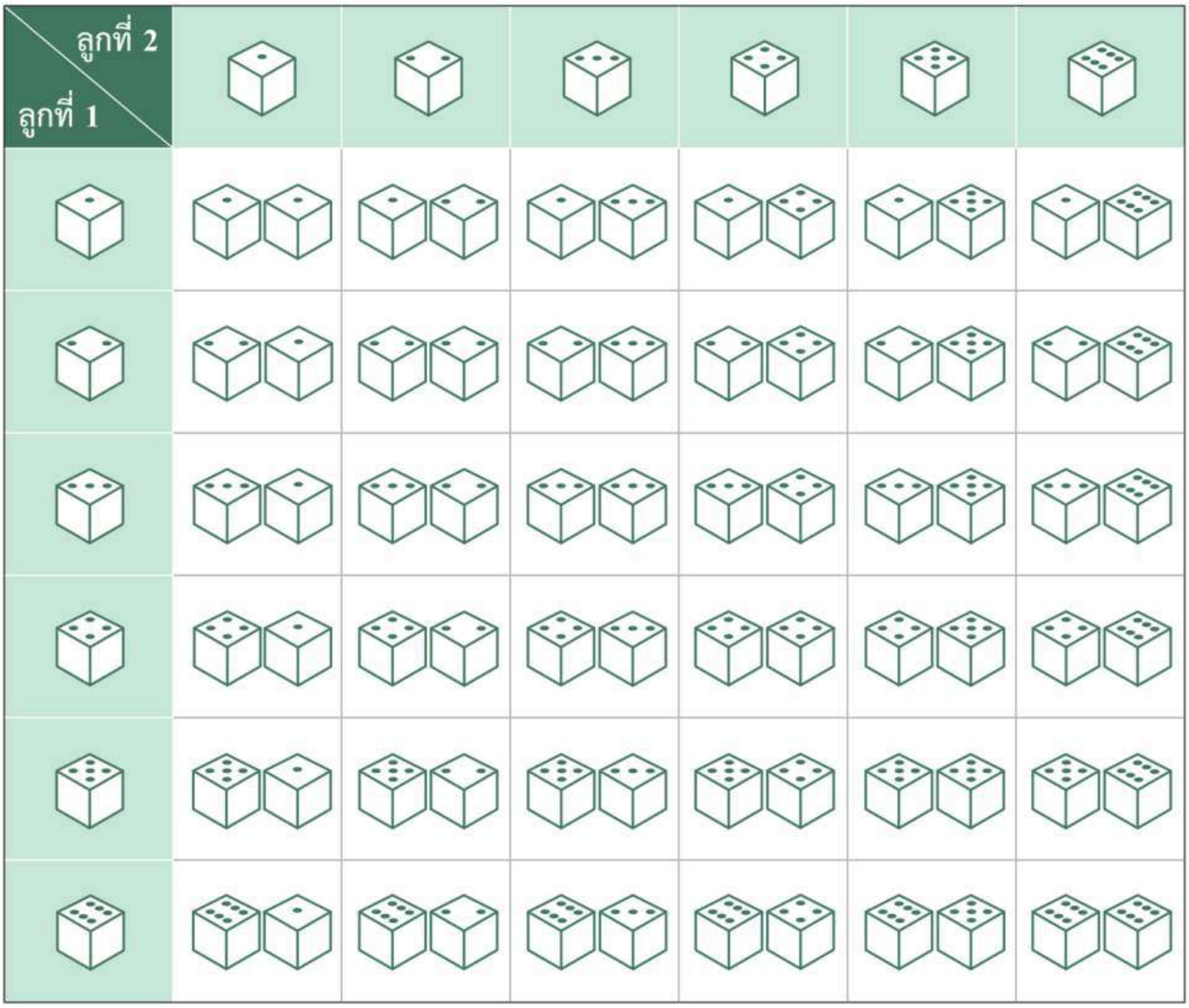
3.2 ความน่าจะเป็น

ถ้าต้องการทราบว่า เหตุการณ์ที่สนใจมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด เช่น ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรงหนึ่งเหรียญหนึ่งครั้ง ซึ่งไม่สามารถบอกได้ว่าเหรียญจะขึ้นหัวหรือก้อย แต่ต้องการทราบว่า โอกาสที่เหรียญจะขึ้นหัวมีเท่าใด วิธีหนึ่งที่จะหาคำตอบได้คือ ทำการทดลองสุ่มนั้นซ้ำหลาย ๆ ครั้ง สมมติว่าในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 100 ครั้ง ปรากฏว่าเหรียญขึ้นหัว 46 ครั้ง และขึ้นก้อย 54 ครั้ง อัตราส่วน $\frac{46}{100}$ ซึ่งเท่ากับ 0.46 หรือ 46% บอกให้ทราบว่าโอกาสที่เหรียญจะขึ้นหัวมีเท่าใด และเมื่อทำการทดลองมากครั้งขึ้น อัตราส่วนที่ได้ก็จะน่าเชื่อถือมากขึ้น อย่างไรก็ดี วิธีนี้ไม่สามารถบอกได้แน่นอนว่าควรทำการทดลองสุ่มจำนวนกี่ครั้งจึงจะเหมาะสม เช่น 1,000 ครั้ง 2,000 ครั้ง หรือ 10,000 ครั้ง อีกทั้งการทำการทดลองสุ่มหลาย ๆ ครั้ง ย่อมเสียเวลามากและไม่สะดวก จึงใช้**วิธีคำนวณจากปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ที่สนใจของการทดลองสุ่ม โดยหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง ทั้งนี้ ปริภูมิตัวอย่างที่ใช้ในการคำนวณนี้จะต้องประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน เท่านั้น**

ตัวอย่างเช่น ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มที่ได้ จะได้ ปริภูมิตัวอย่าง คือ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ เนื่องจากลูกเต๋าเที่ยงตรง ดังนั้น สมาชิกแต่ละตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน ถ้าให้ E แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็น 3 จะได้ $E = \{3\}$ ดังนั้น โอกาสที่เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้น คือ $\frac{1}{6}$ ซึ่งเป็นอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของ E กับจำนวนสมาชิกของ S

พิจารณาอีกตัวอย่างหนึ่ง ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกหนึ่งครั้ง ถ้าสนใจเหตุการณ์ที่ได้ผลบวกของแต้มเป็น 5

เขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองสุ่มได้ดังนี้



ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้ ซึ่งเขียนแทนได้ด้วยเซตของคู่อันดับของแต้มที่ได้จากลูกเต๋าลูกที่ 1 และลูกที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} S = \{&(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), \\ &(2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), \\ &(3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), \\ &(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), \\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\} \end{aligned}$$

เนื่องจากลูกเต๋าทั้งสองลูกเที่ยงตรง ดังนั้น S ประกอบด้วยสมาชิกที่มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน
ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 5
จะได้ $E = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}$
ดังนั้น โอกาสที่จะได้ผลบวกของแต้มเป็น 5 คือ อัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของ E กับจำนวนสมาชิกของ S ซึ่งเท่ากับ $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้น ถ้าเขียนปริภูมิตัวอย่างที่มีสมาชิกเป็นผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสอง จะได้

$$S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

จะเห็นว่า

- ผลบวกของแต้มเป็น 2 เกิดได้วิธีเดียว คือ ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้ม 1
- ผลบวกของแต้มเป็น 3 เกิดได้ 2 วิธี คือ
  ลูกเต๋าลูกที่ 1 ขึ้นแต้ม 1 และลูกเต๋าลูกที่ 2 ขึ้นแต้ม 2
  หรือลูกเต๋าลูกที่ 1 ขึ้นแต้ม 2 และลูกเต๋าลูกที่ 2 ขึ้นแต้ม 1

นั่นคือ การทอดลูกเต๋าที่ผลบวกของแต้มเป็น 3 มีโอกาสที่จะเกิดขึ้นได้มากกว่าการทอดลูกเต๋าที่ผลบวกของแต้มเป็น 2
ดังนั้น สมาชิกแต่ละตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นได้ไม่เท่ากัน

ถ้าสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง**มีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากัน**แล้ว เรียกอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่สนใจกับจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างว่า **ความน่าจะเป็น (probability)** ของเหตุการณ์

บทนิยาม 3

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด โดยที่สมาชิกทุกตัวของ S มีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน และให้ E เป็นเหตุการณ์ที่เป็นสับเซตของ S
ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E เขียนแทนด้วย $P(E)$ นิยามโดย

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$$

เมื่อ $n(E)$ แทนจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E
และ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่าง S

ความน่าจะเป็น คือ จำนวนที่บอกให้ทราบว่าเหตุการณ์ที่สนใจมีโอกาสเกิดขึ้นมากน้อยเพียงใด

ในกรณีที่ปริภูมิตัวอย่างเป็นเซตจำกัด

- $P(E)=0$ หมายความว่า เหตุการณ์ E ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลยหรือเป็นไปไม่ได้ที่เหตุการณ์ E จะเกิดขึ้น เช่น ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มมากกว่า 6 จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง แล้ว $P(E)=\frac{0}{6}=0$
- $P(E)=1$ หมายความว่า เหตุการณ์ E เกิดขึ้นอย่างแน่นอน เช่น ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคู่หรือจำนวนคี่จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง แล้ว $P(E)=\frac{6}{6}=1$
- $P(E)=\frac{1}{2}$ หมายความว่า โอกาสที่เหตุการณ์ E จะเกิดหรือไม่เกิดมีเท่ากัน เช่น ถ้า E แทนเหตุการณ์ที่ได้แต้มเป็นจำนวนคู่จากการทอดลูกเต๋าหนึ่งลูกหนึ่งครั้ง แล้ว $P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$
- $P(E_1)=\frac{1}{5}$ และ $P(E_2)=\frac{2}{5}$ หมายความว่า โอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E_2 เป็นสองเท่าของโอกาสที่จะเกิดเหตุการณ์ E_1

สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็น

ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด

1. สำหรับเหตุการณ์ E ใด ๆ จะได้ว่า $0 \le P(E) \le 1$
2. ความน่าจะเป็นของปริภูมิตัวอย่าง S เท่ากับ 1 นั่นคือ $P(S) = 1$
3. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่เป็นเซตว่างเท่ากับ 0 นั่นคือ $P(\varnothing) = 0$

เสริมสมอง : จดหมายโต้ตอบระหว่าง Pascal กับ Fermat



Blaise Pascal



Pierre de Fermat

จุดเริ่มต้นที่สำคัญของทฤษฎีความน่าจะเป็นเกิดจากจดหมายโต้ตอบระหว่างนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศส 2 คน คือ Blaise Pascal (ค.ศ. 1623 – 1662) และ Pierre de Fermat (ค.ศ. 1601 – 1665) เกี่ยวกับปัญหาของการเล่นการพนันที่สมาชิกในสังคมชั้นสูงของฝรั่งเศสที่ชื่อว่า Antoine Gombaud (ค.ศ. 1607 – 1684) หรือที่รู้จักกันในนาม Chevalier de Méré ได้เขียนไปถาม Pascal ใน ค.ศ. 1654 โดย Pascal และ Fermat ได้ร่วมกันหาวิธีแก้ปัญหาดังกล่าวผ่านทางจดหมายโต้ตอบนั้น ทำให้นักคณิตศาสตร์ทั้งสองได้พัฒนาแนวคิดซึ่งเป็นรากฐานของทฤษฎีความน่าจะเป็นที่ศึกษากันในปัจจุบันขึ้น

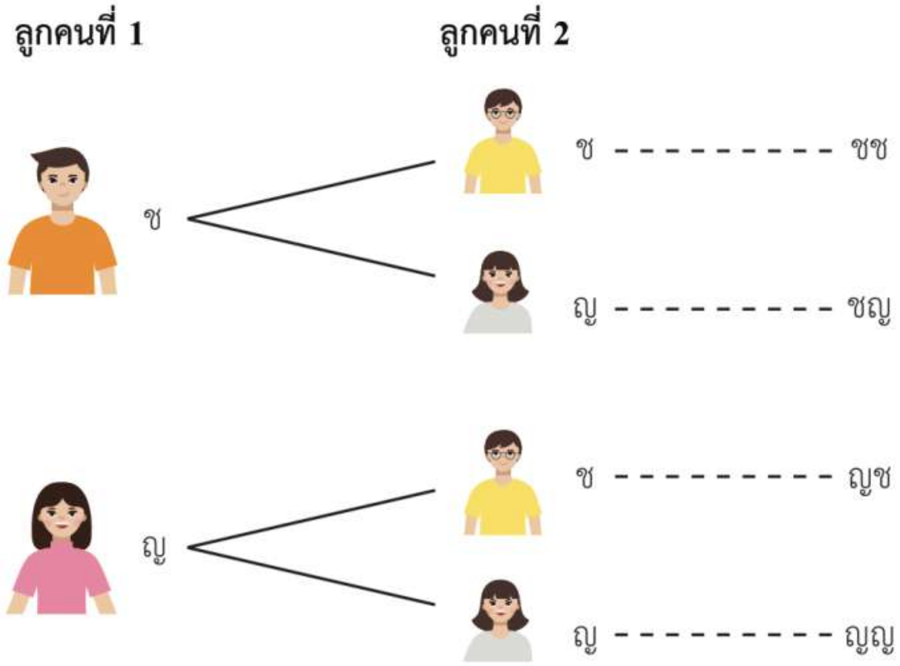
ตัวอย่างที่ 8

สามีภรรยาคู่หนึ่งต้องการมีลูก 2 คน ถ้าสมมติว่าโอกาสที่ลูกแต่ละคนจะเป็นชายหรือหญิงเท่ากัน จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1) ลูกคนแรกเป็นชายและคนที่สองเป็นหญิง
2) มีลูกชายอย่างน้อยหนึ่งคน
3) ไม่มีลูกชายเลย

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
ช แทนลูกเป็นชาย
และ ญ แทนลูกเป็นหญิง

สามารถเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดได้ดังนี้



จากแผนภาพ จะได้ $S = \{$ชช, ชญ, ญช, ญญ$\}$

ดังนั้น $n(S) = 4$

ให้ E_1, E_2 และ E_3 เป็นเหตุการณ์ในข้อ 1), 2) และ 3) ตามลำดับ

1) เนื่องจาก $E_1 = \{$ชญ$\}$ จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกคนแรกเป็นชายและคนที่สองเป็นหญิง เท่ากับ $\frac{1}{4}$

2) เนื่องจาก $E_2 = \{$ชช, ชญ, ญช$\}$ จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{3}{4}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะมีลูกชายอย่างน้อยหนึ่งคน เท่ากับ $\frac{3}{4}$

3) เนื่องจาก $E_3 = \{$ญญ$\}$ จะได้ $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{1}{4}$

   ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวนี้จะไม่มีลูกชายเลย เท่ากับ $\frac{1}{4}$ ■

ตัวอย่างที่ 9

ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1) ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10
2) ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง ลูกเต๋าลูกแรกปรากฏผลได้ 6 วิธี และลูกเต๋าลูกที่สองปรากฏผลได้อีก 6 วิธี ดังนั้น จากหลักการคูณ จะได้ $n(S) = 6 \times 6 = 36$

เขียนแผนภาพแสดงผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองที่เป็นไปได้ทั้งหมดได้ดังนี้

แต้มลูกที่ 1 \ แต้มลูกที่ 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

ให้ E_1 และ E_2 แทนเหตุการณ์ในข้อ 1) และ 2) ตามลำดับ

1) จากตาราง จะเห็นว่า $n(E_1) = 6$

จะได้ $P(E_1) = \dfrac{n(E_1)}{n(S)} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มมากกว่าหรือเท่ากับ 10 คือ $\dfrac{1}{6}$

2) ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองหารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเท่ากับ 3, 6, 9 หรือ 12
จากตาราง จะเห็นว่า $n(E_2) = 12$
จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของแต้มหารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ■

การหาความน่าจะเป็นอาจพิจารณาเพียงจำนวนสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ โดยไม่จำเป็นต้องเขียนแจกแจงสมาชิก โดยเฉพาะเมื่อปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์เป็นเซตที่มีจำนวนสมาชิกมาก ซึ่งในการนับจำนวนสมาชิกของเซตอาจใช้ความรู้เรื่องหลักการนับเบื้องต้นที่ได้ศึกษาในบทที่แล้ว ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 10

ในการเลือกจำนวนสองจำนวนโดยไม่เจาะจงจาก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ โดยเลือกทีละจำนวนและไม่ให้ซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนแรกมากกว่า 3

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้
จากหลักการคูณ จะได้ว่า มีวิธีเลือกจำนวนสองจำนวนที่ไม่ซ้ำกันจาก $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ทั้งหมด $5 \times 4 = 20$ วิธี ดังนั้น $n(S) = 20$
ให้ E แทนเหตุการณ์ที่จะได้จำนวนแรกมากกว่า 3 และจำนวนทั้งสองไม่ซ้ำกัน
หาจำนวนสมาชิกของ E ได้ดังนี้
ขั้นที่ 1 เลือกจำนวนแรกได้ 2 วิธี คือ เลือก 4 หรือ 5
ขั้นที่ 2 ในแต่ละวิธีของขั้นที่ 1 จะมีวิธีเลือกจำนวนที่สองที่ไม่ซ้ำกับจำนวนแรกได้ 4 วิธี
ดังนั้น $n(E) = 2 \times 4 = 8$
จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$
ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนแรกมากกว่า 3 เท่ากับ $\frac{2}{5}$ ■

ตัวอย่างที่ 11

ถ้าครูสุ่มนักเรียน 3 คน จากนักเรียน 10 คน ซึ่งเป็นผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 4 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ครูสุ่มได้ผู้ชาย 2 คน และผู้หญิง 1 คน

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = C_{10,\,3} = \frac{10!}{7!3!} = 120$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ครูสุ่มได้ผู้ชาย 2 คน และผู้หญิง 1 คน

ขั้นที่ 1 เลือกผู้ชาย 2 คน จากผู้ชาย 6 คน ทำได้ $C_{6,\,2}$ วิธี

ขั้นที่ 2 เลือกผู้หญิง 1 คน จากผู้หญิง 4 คน ทำได้ 4 วิธี

ดังนั้น $n(E) = C_{6,\,2} \times 4 = \frac{6!}{4!2!} \times 4 = 60$

จะได้ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ครูสุ่มได้ผู้ชาย 2 คน และผู้หญิง 1 คน เท่ากับ $\frac{1}{2}$ ■

ตัวอย่างที่ 12

ไพ่สำรับหนึ่งมีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ สุ่มหยิบไพ่ 2 ใบ จากสำรับ โดยหยิบไพ่ทีละใบและไม่ใส่คืนก่อนหยิบใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1) ไพ่ใบแรกเป็นไพ่ที่มีหน้าสีแดงและไพ่ใบที่สองเป็นไพ่ที่มีหน้าสีดำ
2) หยิบได้ไพ่ K ทั้งสองใบ
3) หยิบได้ไพ่โพดำและไพ่โพแดงอย่างละใบ

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

การทดลองสุ่มนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 หยิบไพ่ใบแรก จากสำรับที่มีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ ผลการหยิบมี 52 แบบ

ขั้นที่ 2 หยิบไพ่ใบที่สอง โดยที่ไม่ใส่ไพ่ใบแรกคืนก่อนจะหยิบไพ่ใบที่สอง แสดงว่ามีไพ่เหลืออยู่ในสำรับ 51 ใบ ผลการหยิบมี 51 แบบ

จะได้ $n(S) = 52 \times 51$

1) ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่ไพ่ใบแรกเป็นไพ่ที่มีหน้าสีแดงและไพ่ใบที่สองเป็นไพ่ที่มีหน้าสีดำ

ขั้นที่ 1 หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่ที่มีหน้าสีแดง ผลการหยิบมี 26 แบบ

ขั้นที่ 2 หยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่ที่มีหน้าสีดำ ผลการหยิบมี 26 แบบ

ดังนั้น $n(E_1) = 26 \times 26$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{26 \times 26}{52 \times 51} = \frac{13}{51}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ไพ่ใบแรกเป็นไพ่ที่มีหน้าสีแดงและไพ่ใบที่สองเป็นไพ่ที่มีหน้าสีดำ เท่ากับ $\frac{13}{51}$

2) ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ K ทั้งสองใบ

ขั้นที่ 1 หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่ K ผลการหยิบมี 4 แบบ

ขั้นที่ 2 หยิบไพ่ใบที่สอง โดยที่ไม่ใส่ไพ่ใบแรกคืนก่อนจะหยิบไพ่ใบที่สอง แสดงว่ามีไพ่ K เหลืออยู่ในสำรับ 3 ใบ ผลการหยิบมี 3 แบบ

ดังนั้น $n(E_2) = 4 \times 3$

จะได้ $P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4 \times 3}{52 \times 51} = \frac{1}{221}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่ K ทั้งสองใบ เท่ากับ $\frac{1}{221}$

3) ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำและไพ่โพแดงอย่างละใบ

เหตุการณ์ E_3 เกิดขึ้นได้สองกรณีคือ หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่โพดำและหยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่โพแดง หรืออีกกรณีคือ หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่โพแดงและหยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่โพดำ

สำหรับกรณีแรก

ขั้นที่ 1 หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่โพดำ ผลการหยิบมี 13 แบบ

ขั้นที่ 2 หยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่โพแดง ผลการหยิบมี 13 แบบ

ดังนั้น จำนวนผลการหยิบไพ่โดยที่หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่โพดำและหยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่โพแดง คือ $13 \times 13 = 169$ แบบ

สำหรับกรณีที่สอง สามารถทำได้ในทำนองเดียวกัน จะได้ จำนวนผลการหยิบไพ่โดยที่หยิบไพ่ใบแรกได้ไพ่โพแดงและหยิบไพ่ใบที่สองได้ไพ่โพดำ คือ 169 แบบ

ดังนั้น $n(E_3) = 169 + 169 = 338$

จะได้ $P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{338}{52 \times 51} = \frac{13}{102}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่หยิบได้ไพ่โพดำและไพ่โพแดงอย่างละใบ เท่ากับ $\frac{13}{102}$ ■

ตัวอย่างที่ 13

ด้วงสุ่มหยิบสลาก 2 ใบ จากกล่องที่บรรจุสลาก 4 ใบ โดยมีหมายเลข 1, 2, 3 และ 4 กำกับไว้ จงหาความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อกำหนดการทดลองสุ่มดังนี้

1) ด้วงหยิบสลาก 2 ใบ พร้อมกัน
2) ด้วงหยิบสลากทีละใบโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง
3) ด้วงหยิบสลากทีละใบโดยใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

วิธีทำ 1) ให้ S_1 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในข้อ 1)

จำนวนผลการหยิบสลาก 2 ใบ พร้อมกัน จากสลาก 4 ใบ เท่ากับ $C_{4,\,2}$ แบบ

ดังนั้น $n(S_1) = C_{4,\,2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$

ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลาก 2 ใบ พร้อมกัน

ในกรณีนี้ จะได้ว่าหมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ สลากทั้งสองใบที่ด้วงหยิบได้ใบหนึ่งมีหมายเลข 2 กำกับไว้ และอีกใบหนึ่งมีหมายเลข 4 กำกับไว้

นั่นคือ $n(E_1) = 1$

จะได้ $P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S_1)} = \frac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลาก 2 ใบ พร้อมกัน เท่ากับ $\frac{1}{6}$

2) ให้ S_2 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในข้อ 2)

การทดลองสุ่มนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ด้วงหยิบสลากใบแรก จากกล่องที่มีสลากทั้งหมด 4 ใบ ผลการหยิบมี 4 แบบ
ขั้นที่ 2 ด้วงหยิบสลากใบที่สอง โดยที่ด้วงไม่ใส่สลากใบแรกคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง แสดงว่ามีสลากเหลืออยู่ในกล่อง 3 ใบ ผลการหยิบมี 3 แบบ

จะได้ $n(S_2) = 4 \times 3 = 12$

ให้ E_2 แทนเหตุการณ์ที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลากทีละใบโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

สามารถพิจารณาเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ด้วงหยิบสลากใบแรกได้หมายเลขบนสลากเป็นจำนวนคู่ ผลการหยิบมี 2 แบบ
ขั้นที่ 2 ด้วงหยิบสลากใบที่สอง โดยที่ด้วงไม่ใส่สลากใบแรกคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง แสดงว่ามีสลากที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่กำกับไว้เหลืออยู่ 1 ใบ ผลการหยิบมี 1 แบบ

ดังนั้น $n(E_2) = 2 \times 1 = 2$

จะได้ $P(E_2) = \dfrac{n(E_2)}{n(S_2)} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลากทีละใบโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง เท่ากับ $\dfrac{1}{6}$

3) ให้ S_3 แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มในข้อ 3)

การทดลองสุ่มนี้สามารถแบ่งได้เป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ด้วงหยิบสลากใบแรก ผลการหยิบมี 4 แบบ
ขั้นที่ 2 ด้วงหยิบสลากใบที่สอง โดยที่ด้วงใส่สลากใบแรกคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง แสดงว่ามีสลากอยู่ในกล่อง 4 ใบ ผลการหยิบมี 4 แบบ

จะได้ $n(S_3) = 4 \times 4 = 16$

ให้ E_3 แทนเหตุการณ์ที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลากทีละใบโดยใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง

สามารถพิจารณาเป็น 2 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ด้วงหยิบสลากใบแรกได้หมายเลขบนสลากเป็นจำนวนคู่ ผลการหยิบมี 2 แบบ
ขั้นที่ 2 ด้วงหยิบสลากใบที่สอง โดยที่ด้วงใส่สลากใบแรกคืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง แสดงว่ามีสลากที่มีหมายเลขเป็นจำนวนคู่กำกับไว้ 2 ใบ ผลการหยิบมี 2 แบบ

ดังนั้น $n(E_3) = 2 \times 2 = 4$

จะได้ $P(E_3) = \dfrac{n(E_3)}{n(S_3)} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หมายเลขบนสลากที่ด้วงหยิบได้ทั้งสองใบเป็นจำนวนคู่ เมื่อด้วงหยิบสลากทีละใบโดยใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง เท่ากับ $\dfrac{1}{4}$ ■

ตัวอย่างที่ 14

บริษัทผลิตเสื้อยี่ห้อ tomorrow จัดกิจกรรมลุ้นรางวัลให้กับลูกค้า โดยนำคำที่ได้จากการเรียงตัวอักษรในคำว่า “tomorrow” ทั้งหมดมาพิมพ์ลงบนป้ายติดคอเสื้อตัวละ 1 คำ เมื่อขายเสื้อที่ติดคำเหล่านี้หมดแล้ว บริษัทจะสุ่มคำที่ได้จากการเรียงตัวอักษรในคำว่า “tomorrow” จำนวน 1 คำ เพื่อหาผู้โชคดี จงหาความน่าจะเป็นที่สุ่มได้คำที่ขึ้นต้นด้วยตัวอักษร m

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

เนื่องจากคำว่า “tomorrow” ประกอบด้วยตัวอักษรทั้งหมด 8 ตัว โดยเป็นตัวอักษร o ทั้งหมด 3 ตัว ตัวอักษร r ทั้งหมด 2 ตัว และตัวอักษร t, m และ w อย่างละ 1 ตัว

จะได้ $n(S) = \dfrac{8!}{3!2!1!1!1!} = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่สุ่มได้คำที่ขึ้นต้นด้วยตัวอักษร m

ดังนั้น $n(E) = \dfrac{7!}{3!2!1!1!} = 7 \times 6 \times 5 \times 2$

จะได้ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 2}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 2} = \dfrac{1}{8}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้คำที่ขึ้นต้นด้วยตัวอักษร m เท่ากับ $\dfrac{1}{8}$ ■

ตัวอย่างที่ 15

ในการประชุมครั้งหนึ่งมีผู้เข้าร่วมประชุม 10 คน โดย 2 ใน 10 คนนี้ คือ ชานนท์และวิภา ถ้าโต๊ะที่ใช้ประชุมเป็นโต๊ะกลมและกำหนดชื่อสำหรับแต่ละที่นั่งแบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ชานนท์และวิภาได้นั่งติดกัน

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้ $n(S) = (10-1)! = 9!$

ให้ E แทนเหตุการณ์ที่ชานนท์และวิภาได้นั่งติดกัน

จะพิจารณาว่าชานนท์และวิภาเป็นเสมือนคนคนเดียวกัน ดังนั้น จะเสมือนมีคนทั้งหมด 9 คน ซึ่งจะจัดคน 9 คน นั่งรอบโต๊ะกลมได้ $(9-1)! = 8!$ แบบ

เนื่องจากสามารถสลับตำแหน่งของชานนท์และวิภาได้ 2 แบบ ดังนั้น $n(E) = 8! \times 2$

จะได้ $P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{8! \times 2}{9!} = \dfrac{2}{9}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ชานนท์และวิภาได้นั่งติดกันในการประชุมนี้ เท่ากับ $\dfrac{2}{9}$ ■

การหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นเป็นการหาความน่าจะเป็นโดยใช้ **ความน่าจะเป็นเชิงทฤษฎี (theoretical probability)** ภายใต้สมมติฐานว่าสมาชิกของปริภูมิตัวอย่างมีโอกาสเกิดขึ้นได้เท่ากันเท่านั้น แต่อย่างไรก็ดี เหตุการณ์หลายเหตุการณ์ในชีวิตจริง ไม่สามารถใช้วิธีการที่กล่าวมาคำนวณหาความน่าจะเป็นได้ เช่น การหาความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกในแต่ละเดือนของปี ซึ่งในแต่ละเดือนโอกาสที่ฝนจะตกไม่เท่ากัน หรือการหาความน่าจะเป็นที่คนคนหนึ่งจะเป็นโรคมะเร็งปอด ซึ่งโอกาสที่แต่ละคนจะเป็นโรคมะเร็งปอดไม่เท่ากัน ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับว่าบุคคลนั้นอยู่ในกลุ่มเสี่ยงหรือไม่ เช่น เป็นผู้ที่สูบบุหรี่เป็นประจำหรือไม่ ดังนั้น ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ดังกล่าวอาจต้องใช้วิธีการอื่น เช่น ใช้ข้อมูลที่ได้จากการทดลองซ้ำกันหลาย ๆ ครั้ง หรือใช้การสุ่มตัวอย่าง ยกตัวอย่างเช่น บริษัทแห่งหนึ่งผลิตสินค้าได้วันละ 10,000 ชิ้น ถ้าต้องการทราบว่า ความน่าจะเป็นที่สินค้าที่ผลิตจะไม่ได้มาตรฐานเป็นเท่าใด อาจจะใช้วิธีการสุ่มตัวอย่างเพื่อหาว่าจากสินค้าที่สุ่มมา 100 ชิ้น มีสินค้าที่ไม่ได้คุณภาพตามมาตรฐานกี่ชิ้น ถ้าพบว่า มีสินค้า 3 ชิ้น ที่ไม่ได้มาตรฐาน อาจสรุปได้ว่า ความน่าจะเป็นที่สินค้าจะไม่ได้คุณภาพตามมาตรฐานเท่ากับ $\dfrac{3}{100}$ หรือ 3% ความน่าจะเป็นชนิดนี้เรียกว่า **ความน่าจะเป็นเชิงการทดลอง (experimental probability)** ซึ่งจะมีความถูกต้องแม่นยำเพียงใดขึ้นอยู่กับขนาดของกลุ่มตัวอย่างที่เลือกมา รวมถึงการสุ่มตัวอย่าง การทดลองซ้ำเพื่อให้เกิดความมั่นใจ โดยมักพบความน่าจะเป็นเชิงการทดลองในการสำรวจความคิดเห็นของประชากร การทดสอบผลของยา การทดสอบคุณภาพของสินค้า

เสริมสมอง : ความน่าจะเป็นในเกมคอมพิวเตอร์

ความน่าจะเป็นมีส่วนสำคัญในการออกแบบเกมคอมพิวเตอร์ไม่ให้คาดเดาได้ โดยในการออกแบบเกมคอมพิวเตอร์ ผู้ออกแบบจะใช้ข้อมูลความน่าจะเป็นและข้อมูลทางสถิติทั้งหมดที่มี เพื่อจำลองสถานการณ์ในเกมให้ใกล้เคียงสถานการณ์จริงที่สุดเท่าที่จะเป็นไปได้ แม้แต่ผู้เล่นที่เก่งที่สุดจึงแพ้ได้เมื่อต้องเล่นแข่งกับคอมพิวเตอร์

แบบฝึกหัด 3.2

1. ในการจับสลากชื่อของนักเรียนหนึ่งคนจากนักเรียน 30 คน ซึ่งเป็นชาย 18 คน และหญิง 12 คน จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่
   1) สลากที่ได้เป็นชื่อของนักเรียนชาย
   2) สลากที่ได้เป็นชื่อของนักเรียนหญิง

2. หวานเย็นสุ่มหยิบลูกปิงปอง 1 ลูก จากถุงใบหนึ่งซึ่งมีลูกปิงปองสีแดง 15 ลูก และลูกปิงปองสีขาว สีเหลือง สีเขียว สีฟ้า และสีดำอย่างละ 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบ
   1) ได้ลูกปิงปองสีแดง
   2) ไม่ได้ลูกปิงปองสีดำ
   3) ได้ลูกปิงปองสีดำหรือสีขาว

3. กล่องใบหนึ่งมีลูกแก้ว 13 ลูก เป็นสีแดง 6 ลูก สีขาว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้ว 1 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้
   1) ลูกแก้วสีเหลือง
   2) ลูกแก้วที่ไม่ใช่สีแดง

4. ไพ่สำรับหนึ่งมีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ สุ่มหยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้
   1) ไพ่หมายเลข 7
   2) ไพ่ J, Q หรือ K
   3) ไพ่ดอกจิก
   4) ไพ่ A โพแดง

5. กล่องใบหนึ่งบรรจุเบี้ย 6 อัน โดยมีหมายเลข 3, 4, 7, 9, 10 และ 11 กำกับไว้ ถ้าสุ่มหยิบเบี้ย 1 อัน จากกล่องใบนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เบี้ยที่มีหมายเลขเป็น
   1) จำนวนเฉพาะ
   2) จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว
   3) จำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัว
   4) จำนวนที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

6. ถุงใบหนึ่งใส่เหรียญบาทไว้ 100 เหรียญ โดยมีหมายเลข $1, 2, 3, \ldots, 100$ กำกับไว้ ถ้าสุ่มหยิบเหรียญ 1 เหรียญ จากถุงใบนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้เหรียญที่มีหมายเลขเป็น
   1) จำนวนเต็มบวก
   2) จำนวนคู่
   3) จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว
   4) จำนวนที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว

7. สามีภรรยาคู่หนึ่งต้องการมีลูก 2 คน ถ้าสมมติว่าโอกาสที่ลูกแต่ละคนจะเป็นชายหรือหญิงเท่ากัน จงหาความน่าจะเป็นที่
   1) มีลูกเป็นชายทั้งคู่หรือหญิงทั้งคู่
   2) มีลูกเป็นหญิงอย่างน้อยหนึ่งคน

8. กล่องใบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 5 หลอด ซึ่งเป็นหลอดดี 3 หลอด และหลอดเสีย 2 หลอด ถ้าสุ่มหยิบหลอดไฟ 2 หลอด พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดดี 1 หลอด และหลอดเสีย 1 หลอด

9. ในลิ้นชักมีถุงเท้าที่จัดเป็นคู่ไว้ 4 คู่ โดยเป็นถุงเท้าสีดำ 2 คู่ และสีขาว 2 คู่ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้า 2 คู่ พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าทั้งสองคู่เป็นสีเดียวกัน

10. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ผลคูณของแต้มเป็นจำนวนคู่

11. ข้าวตังสุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูก จากถุงใบหนึ่งซึ่งมีลูกบอลสีแดง 2 ลูก และสีเขียว 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้ลูกบอลสีแดงและสีเขียวอย่างละ 1 ลูก เมื่อกำหนดให้
    1) หยิบลูกบอล 2 ลูก พร้อมกัน
    2) หยิบลูกบอลทีละลูกโดยไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    3) หยิบลูกบอลทีละลูกโดยใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

12. นักกีฬาคนหนึ่งมีเสื้อกีฬา 5 ตัว เป็นเสื้อสีขาว 3 ตัว สีฟ้า 2 ตัว และมีกางเกงกีฬา 4 ตัว เป็นกางเกงสีขาว 1 ตัว สีเทา 3 ตัว ถ้านักกีฬาคนนี้แต่งตัวเพื่อไปเล่นกีฬาโดยไม่เจาะจง จงหาความน่าจะเป็นที่นักกีฬาคนนี้จะสวม
    1) เสื้อและกางเกงสีเดียวกัน
    2) เสื้อและกางเกงสีต่างกัน
    3) เสื้อสีฟ้า

13. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 30 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 10 ลูก สีเขียว 10 ลูก และสีเหลือง 10 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่
    1) ได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    2) ได้ลูกบอลลูกแรกเป็นสีแดงและลูกบอลลูกที่สองเป็นสีเหลือง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    3) ได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    4) ได้ลูกบอลสีเขียวทั้งสองครั้ง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    5) ได้ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง
    6) ไม่ได้ลูกบอลสีแดง เมื่อกำหนดให้หยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง

14. ไพ่สำรับหนึ่งมีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ สุ่มหยิบไพ่ 3 ใบ พร้อมกันจากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่ได้
    1) ไพ่ J, Q และ K อย่างละใบ
    2) ไพ่ที่มีหน้าสีแดง 2 ใบ
    3) ไพ่ที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรเดียวกันทั้งสามใบ
    4) ไพ่ที่มีหมายเลขหรือตัวอักษรต่างกันทั้งสามใบ

15. วันภาษาไทยแห่งชาติตรงกับวันที่ 29 กรกฎาคม ของทุกปี ซึ่งในปีนี้โรงเรียนได้จัดประกวดแต่งกลอนสด โดยมีผู้เข้ารอบสุดท้าย 3 คน ถ้าผู้เข้าแข่งขันแต่ละคนต้องสุ่มหัวข้อที่จะแต่งกลอนสด 1 หัวข้อ จากหัวข้อที่มีอยู่ 5 หัวข้อ จงหาความน่าจะเป็นที่มีผู้เข้าแข่งขัน 2 คน สุ่มได้หัวข้อเดียวกัน และอีกคนได้หัวข้ออื่น

16. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งที่ต่างกันว่างอยู่ 5 ตำแหน่ง โดยเป็นตำแหน่งสำหรับผู้ชาย 3 ตำแหน่ง และตำแหน่งสำหรับผู้หญิง 2 ตำแหน่ง ถ้ามีผู้มาสมัครเข้าทำงานเป็นผู้ชาย 6 คน และผู้หญิง 5 คน
    1) หากศิวัชเป็นหนึ่งในผู้สมัครงานชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ศิวัชจะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้
    2) หากสร้อยและปรายฟ้าเป็นสองคนในผู้สมัครงานหญิง จงหาความน่าจะเป็นที่สร้อยจะได้เข้าทำงาน แต่ปรายฟ้าไม่ได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้

17. นำนักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง 4 คน มายืนเรียงแถวหน้ากระดาน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนชายและนักเรียนหญิงจะยืนสลับกัน

18. ทรายสั่งไอศกรีม 5 ลูก เป็นรสวานิลลา ชาเขียว สตรอว์เบอร์รี เผือก และช็อกโกแลตอย่างละ 1 ลูก ถ้าคนขายนำไอศกรีมแต่ละลูกมาวางเรียงซ้อนกันบนโคนในแนวตั้งแบบสุ่ม จงหาความน่าจะเป็นที่ไอศกรีมลูกบนสุดเป็นรสวานิลลา และไอศกรีมลูกกลางเป็นรสชาเขียว



19. บริษัทแห่งหนึ่งฉลองครบรอบ 10 ปี ในวันที่ 10 พฤศจิกายน ค.ศ. 2011 จึงจัดกิจกรรมมอบโชคให้แก่ลูกค้า มีรางวัลใหญ่ 1 รางวัล โดยบริษัทนำตัวเลข 1, 0, 1, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 1 มาจัดเรียงเป็นรหัส 10 หลัก แล้วส่งให้กับลูกค้าแบบสุ่ม จากนั้นจึงใช้คอมพิวเตอร์สุ่มรหัสเพื่อหาผู้โชคดี จงหาความน่าจะเป็นที่รหัสของผู้ที่ได้รับรางวัลใหญ่ขึ้นต้นด้วย 1 และลงท้ายด้วย 2

20. มีหนังสือเคมีต่างกัน 3 เล่ม หนังสือคณิตศาสตร์ต่างกัน 2 เล่ม และหนังสือภาษาอังกฤษต่างกัน 4 เล่ม ต้องการนำหนังสือทั้งหมดมาวางเรียงบนชั้นหนังสือชั้นหนึ่ง จงหาความน่าจะเป็นที่
    1) หนังสือคณิตศาสตร์อยู่ในตำแหน่งหัวแถวและท้ายแถว
    2) หนังสือวิชาเดียวกันอยู่ติดกัน

21. สุ่มจำนวนคี่สามหลักโดยเลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนคี่นี้มากกว่า 300 แต่น้อยกว่า 900

22. ต้องการนำหลอดไฟสีขาว 4 หลอด สีแดง 5 หลอด และสีน้ำเงิน 6 หลอด ไปประดับรั้วในแนวเส้นตรง ถ้าหลอดไฟสีเดียวกันถือว่าเหมือนกัน จงหาความน่าจะเป็นที่
    1) หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกันทั้งหมด
    2) หลอดไฟสีขาวอยู่ทางซ้ายสุด และหลอดไฟสีน้ำเงินอยู่ทางขวาสุด

23. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลที่แตกต่างกัน 11 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 5 ลูก สีขาว 3 ลูก และสีน้ำเงิน 3 ลูก ถ้าต้องการหยิบลูกบอล 3 ลูก พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ได้
    1) ลูกบอลครบทุกสี
    2) ลูกบอลสีแดงอย่างน้อย 1 ลูก
    3) ลูกบอลสีน้ำเงินอย่างน้อย 1 ลูก และไม่ได้ลูกบอลสีขาว

24. สุ่มจำนวนหกหลักที่สร้างจากการนำเลขโดด 6 ตัว คือ 0, 4, 4, 5, 5, 5 มาจัดเรียง จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้
    1) อยู่ระหว่าง 400,000 และ 500,000
    2) มากกว่า 500,000
    3) มากกว่า 400,000 และเป็นจำนวนคู่

25. ถ้าต้องการจัดลูกเสือ 5 คน และเนตรนารี 6 คน นั่งล้อมเป็นวงกลมรอบกองไฟ จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีลูกเสือสองคนใดนั่งติดกัน

กิจกรรม : Monty Hall Problem

Monty Hall Problem เป็นปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งมีที่มาจากเกมโชว์ทางโทรทัศน์ชื่อ Let's Make a Deal โดยออกอากาศในสหรัฐอเมริกาเมื่อ ค.ศ. 1984 – 1986 และ Monty Hall เป็นพิธีกรของรายการ กติกาของเกมโชว์นี้มีอยู่ว่า "มีประตูที่มีลักษณะเหมือนกันอยู่สามบานคือประตูหมายเลข 1, 2 และ 3 โดยด้านหลังประตูทั้งสามบานนี้จะมีประตูเพียงบานเดียวที่มีรถยนต์ซึ่งเป็นของรางวัลใหญ่อยู่ และอีกสองบานที่เหลือจะมีแพะอยู่ ผู้เข้าแข่งขันสามารถเลือกประตูบานใดก็ได้ 1 บาน เมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกประตูหมายเลขใดหมายเลขหนึ่งแล้วพิธีกรจะเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน จากประตูสองบานที่ผู้เข้าแข่งขันไม่ได้เลือก **ดังนั้น ตอนนี้จะมีประตูที่ยังปิดอยู่สองบาน ประตูบานหนึ่งคือประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกและประตูอีกบานหนึ่งคือประตูที่ผู้เข้าแข่งขันไม่ได้เลือก จากนั้นพิธีกรบอกผู้เข้าแข่งขันว่า ให้โอกาสผู้เข้าแข่งขันสามารถเปลี่ยนใจมาเลือกประตูอีกบานหนึ่งได้**"

ขั้นตอนการปฏิบัติ

1. จากสถานการณ์ที่กำหนดให้ ถ้านักเรียนเป็นผู้เข้าแข่งขัน ควรจะเลือกเปลี่ยนประตูหรือไม่ เพราะเหตุใด
2. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/7402
3. ทดลองเล่นเกม โดยคลิกเลือกประตูหมายเลข 1, 2 หรือ 3 จากนั้นโปรแกรมจะเปิดประตูบานที่เหลือที่มีแพะอยู่ 1 บาน คลิกเลือกว่าจะเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตูตามที่ตัดสินใจในข้อ 1





4. ทดลองเล่นเกมอย่างน้อย 30 ครั้ง โดยเลือกไม่เปลี่ยนประตู
ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในตารางตามผลลัพธ์ที่ได้จากการเปิดประตูที่นักเรียนเลือก

กรณีไม่เปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

ครั้งที่	รถ	แพะ
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

5. จากการทดลองในข้อ 4 จงหาว่าอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็นเท่าใด

6. ทดลองเล่นเกมอย่างน้อย 30 ครั้ง โดยเลือกเปลี่ยนประตู
ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ลงในตารางตามผลลัพธ์ที่ได้จากการเปิดประตูที่นักเรียนเลือก
กรณีเปลี่ยนประตู

ครั้งที่	รถ	แพะ
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

ครั้งที่	รถ	แพะ
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

ครั้งที่	รถ	แพะ
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30		

7. จากการทดลองในข้อ 6 จงหาว่าอัตราส่วนระหว่างจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ที่เปิดประตูแล้วมีรถยนต์กับจำนวนการทดลองเล่นเกม 30 ครั้ง คิดเป็นเท่าใด

8. จากผลการทดลองข้างต้น นักเรียนคิดว่าการเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตู มีผลต่อการได้รางวัลหรือไม่ เพราะเหตุใด

9. จากสถานการณ์ในเกมโชว์ Let's Make a Deal
   9.1 การเลือกประตูในครั้งแรกจากประตูทั้งสามบาน
      9.1.1 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกมีรถยนต์
      9.1.2 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกมีแพะ

9.2 **กรณีไม่เปลี่ยนประตู** หลังจากพิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน ถ้าผู้เข้าแข่งขันไม่เปลี่ยนใจในการเลือกประตู จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันได้รางวัลเป็นรถยนต์

9.3 **กรณีเปลี่ยนประตู** หลังจากพิธีกรเลือกเปิดประตูที่มีแพะ 1 บาน ถ้าผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู

9.3.1 **กรณีที่ 1** ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีรถยนต์ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าเขาจะได้รางวัลเป็นอะไร

9.3.2 **กรณีที่ 2** ด้านหลังประตูที่ผู้เข้าแข่งขันเลือกในครั้งแรกมีแพะ จงหาความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ในกรณีนี้ และเมื่อผู้เข้าแข่งขันเลือกเปลี่ยนประตู แสดงว่าเขาจะได้รางวัลเป็นอะไร

9.3.3 จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ผู้เข้าแข่งขันได้รางวัลเป็นรถยนต์

10. จากความน่าจะเป็นที่ได้ในข้อ 9.2 และ 9.3 นักเรียนคิดว่าการเลือกเปลี่ยนหรือไม่เปลี่ยนประตู มีผลต่อการได้รางวัลหรือไม่ เพราะเหตุใด

11. คำตอบที่ได้ในข้อ 8 และ 10 สอดคล้องกันหรือไม่ นักเรียนคิดว่าคำตอบในข้อใดน่าเชื่อถือกว่า

3.3 กฎที่สำคัญบางประการของความน่าจะเป็น

ปริภูมิตัวอย่างและเหตุการณ์ต่างก็เป็นเซต โดยในที่นี้ เอกภพสัมพัทธ์คือปริภูมิตัวอย่าง ซึ่งมีเหตุการณ์เป็นสับเซต ดังนั้น สมบัติพื้นฐานของความน่าจะเป็นได้มาจากสมบัติของการดำเนินการของเซต

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มหนึ่ง และ A, B เป็นเหตุการณ์ นั่นคือ $A \subset S$ และ $B \subset S$

จะได้ $A \cup B$ เป็นเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเหตุการณ์ A หรือเหตุการณ์ B หรือทั้งสองเหตุการณ์ นั่นคือ $A \cup B = \{x \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$

$A \cap B$ เป็นเหตุการณ์ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ทั้งในเหตุการณ์ A และเหตุการณ์ B นั่นคือ $A \cap B = \{x \mid x \in A$ และ $x \in B\}$

ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้วจะเรียกเหตุการณ์ A และ B ว่า **เหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive events)**

และ A' เป็นเหตุการณ์ที่ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ในปริภูมิตัวอย่าง S แต่ไม่อยู่ในเหตุการณ์ A นั่นคือ $A' = \{x \mid x \in S$ แต่ $x \notin A\}$

ตัวอย่างที่ 16

ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสอง
ให้ A แทนเหตุการณ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าลูกแรกเป็น 1
และ B แทนเหตุการณ์ที่แต้มบนหน้าลูกเต๋าลูกที่สองเป็น 1
จงเขียนเหตุการณ์ต่อไปนี้ในรูปของเซต A และ B พร้อมทั้งเขียนเหตุการณ์ดังกล่าวแบบแจกแจงสมาชิก

1) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 อย่างน้อยหนึ่งลูก
2) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกไม่ขึ้นแต้ม 1 เลย
3) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้ม 1
4) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 เพียงลูกเดียว

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

จะได้
$$\begin{aligned} S = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

$$A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)\}$$

และ $$B = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$$

1) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 อย่างน้อยหนึ่งลูก คือ $A \cup B$ ซึ่งคือ
$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$

2) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกไม่ขึ้นแต้ม 1 เลย คือ $A' \cap B'$ หรือ $(A \cup B)'$ ซึ่งคือ

$$\begin{aligned}\{&(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

3) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้ม 1 คือ $A \cap B$ ซึ่งคือ $\{(1,1)\}$

4) เหตุการณ์ที่ลูกเต๋าขึ้นแต้ม 1 เพียงลูกเดียว คือ $(A-B)\cup(B-A)$ ซึ่งคือ
$\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1),(6,1)\}$ ■

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงกฎต่าง ๆ ที่ช่วยในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์

ทฤษฎีบท 1

ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ จะได้ว่า

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
3. $P(A') = 1 - P(A)$
4. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

พิสูจน์ ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่างซึ่งเป็นเซตจำกัด และ A, B เป็นเหตุการณ์ใด ๆ

1. เนื่องจาก $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   จะได้ว่า $\dfrac{n(A \cup B)}{n(S)} = \dfrac{n(A)}{n(S)} + \dfrac{n(B)}{n(S)} - \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$

   นั่นคือ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

2. ให้ $A \cap B = \varnothing$ นั่นคือ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน

   จะได้ $P(A \cap B) = 0$

   จากข้อ 1 จะได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

3. เนื่องจาก $A' \cup A = S$ และ $A' \cap A = \varnothing$

   จากข้อ 2 จะได้ว่า $P(S) = P(A \cup A') = P(A) + P(A')$

   เนื่องจาก $P(S) = 1$ ดังนั้น $P(A') = 1 - P(A)$

4. เนื่องจาก $A = (A - B) \cup (A \cap B)$ และ $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

   จากข้อ 2 จะได้ว่า $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

   นั่นคือ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

ตัวอย่างที่ 17

ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่

1) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแต้มมากกว่า 10
2) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแต้มเป็น 7
3) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มไม่เท่ากัน
4) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันแต่ผลบวกของแต้มไม่มากกว่า 10

วิธีทำ ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่างของการทดลองสุ่มนี้

A แทนเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากัน

B แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 7

และ C แทนเหตุการณ์ที่ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 10

จะได้ $S = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$
$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$
$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$A = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

$B = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

และ $C = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$

ดังนั้น $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ และ $P(C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

1) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแต้มมากกว่า 10 คือ $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

เนื่องจาก $A \cap C = \{(6,6)\}$ จะได้ว่า $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

ดังนั้น $P(A \cup C) = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{2}{9}$

2) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแต้มเป็น 7 คือ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

เนื่องจาก $A \cap B = \varnothing$ จะได้ว่า $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$

3) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มไม่เท่ากัน คือ

$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

4) ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันแต่ผลบวกของแต้มไม่มากกว่า 10 คือ $P(A - C) = P(A) - P(A \cap C)$

เนื่องจาก $A \cap C = \{(6,6)\}$ จะได้ $P(A \cap C) = \frac{1}{36}$

ดังนั้น $P(A - C) = \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$

ตัวอย่างที่ 18

กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $P(A)=0.6, P(B')=0.4$ และ $P(A-B)=0.2$ จงหา $P(A'\cap B')$

วิธีทำ เนื่องจาก $A'\cap B'=(A\cup B)'$ ดังนั้น $P(A'\cap B')=P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)$

เนื่องจาก $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$P(B)=1-P(B')=1-0.4=0.6$

และ $P(A\cap B)=P(A)-P(A-B)=0.6-0.2=0.4$

จะได้ $P(A\cup B)=0.6+0.6-0.4=0.8$

ดังนั้น $P(A'\cap B')=1-0.8=0.2$ ■

ตัวอย่างที่ 19

พิจารณาพยากรณ์อากาศของวันนี้กับวันพรุ่งนี้ ถ้าความน่าจะเป็นที่ฝนจะตกวันนี้เป็น 0.7 ความน่าจะเป็นที่ฝนจะไม่ตกวันพรุ่งนี้เป็น 0.5 และความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อยหนึ่งวันที่ฝนจะไม่ตกเป็น 0.6 จงหาความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อยหนึ่งวันที่ฝนจะตก

วิธีทำ ให้ A แทนเหตุการณ์ที่ฝนจะตกวันนี้

และ B แทนเหตุการณ์ที่ฝนจะตกวันพรุ่งนี้

จะได้ $P(A)=0.7$ และ $P(B')=0.5$

เนื่องจากเหตุการณ์ที่มีอย่างน้อยหนึ่งวันที่ฝนจะไม่ตก คือ $A'\cup B'$ หรือ $(A\cap B)'$

จะได้ $P(A'\cup B')=P\left((A\cap B)'\right)=0.6$

ความน่าจะเป็นที่มีอย่างน้อยหนึ่งวันที่ฝนจะตก คือ $P(A\cup B)$

เนื่องจาก $P(B)=1-P(B')=1-0.5=0.5$

และ $P(A\cap B)=1-P\left((A\cap B)'\right)=1-0.6=0.4$

ดังนั้น $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.5-0.4=0.8$ ■

แบบฝึกหัด 3.3

1. ในการโยนเหรียญ 3 เหรียญ พร้อมกันหนึ่งครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือหน้าของเหรียญทั้งสาม
   ให้ E_1 แทนเหตุการณ์ที่เหรียญทั้งสามเหรียญขึ้นหน้าเหมือนกัน
   E_2 แทนเหตุการณ์ที่มีเหรียญขึ้นหัวอย่างน้อยสองเหรียญ
   และ E_3 แทนเหตุการณ์ที่มีเหรียญขึ้นก้อยมากกว่าเหรียญขึ้นหัว
   จงหา
   1) ปริภูมิตัวอย่าง
   2) E_1
   3) E_2
   4) E_3
   5) $E_1 \cup E_2$
   6) $E_2 \cup E_3$
   7) $E_1 \cap E_2$
   8) $E_1 \cap E_3$
   9) E_2'
   10) E_3'

2. ความน่าจะเป็นที่พินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่สหรัฐอเมริกาเท่ากับ $\frac{3}{4}$ ความน่าจะเป็นที่พินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่ประเทศอังกฤษเท่ากับ $\frac{7}{10}$ และความน่าจะเป็นที่พินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่สหรัฐอเมริกาหรือประเทศอังกฤษเท่ากับ $\frac{9}{10}$ จงหาความน่าจะเป็นที่พินิจจะได้รับทุนไปเรียนต่อที่ทั้งสองประเทศ

3. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ถ้า $P(A)=0.4$ และ $P(B)=0.5$ จงหา
   1) $P(A \cup B)$
   2) $P(A')$
   3) $P(A' \cap B)$

4. ให้ A, B และ C เป็นเหตุการณ์ จงแสดงว่า
   $$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$$

5. บริษัทแห่งหนึ่งมีตำแหน่งว่าง 1 ตำแหน่ง มีผู้สมัครเข้าทำงาน 3 คน คือ กานต์ ขิม และคณิน ถ้าโอกาสที่กานต์และขิมจะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้มีเท่ากัน แต่คณินมีโอกาสเป็น 3 เท่าของกานต์ จงหาความน่าจะเป็นที่
   1) กานต์จะได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้
   2) คณินไม่ได้เข้าทำงานที่บริษัทนี้

6. ให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ โดยที่ $P(A)=0.6$, $P(A-B)=0.2$ และ $P(A\cup B)=0.8$ จงหา $P(B)$

7. จากการสอบถามวิธีเดินทางมาทำงานของพนักงานในบริษัทแห่งหนึ่งได้ข้อมูลว่า พนักงาน 50% เดินทางด้วยรถประจำทาง พนักงาน 30% เดินทางด้วยรถไฟฟ้า และพนักงาน 20% เดินทางด้วยรถประจำทางและรถไฟฟ้า ถ้าสุ่มพนักงานมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานคนนี้จะไม่ได้เดินทางด้วยรถประจำทางหรือรถไฟฟ้า

8. โรงพยาบาลแห่งหนึ่งมีผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจหรือโรคเบาหวาน 60% มีผู้ป่วยเป็นโรคหัวใจ 28% และมีผู้ป่วยเป็นโรคเบาหวาน 41% ถ้าสุ่มผู้ป่วยมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้ป่วยคนนี้เป็นโรคเบาหวานเพียงอย่างเดียว

9. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่
   1) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มไม่เท่ากันหรือผลบวกของแต้มเป็น 8
   2) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันหรือผลบวกของแต้มน้อยกว่า 8
   3) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากันแต่ผลบวกของแต้มไม่มากกว่า 6

10. สุ่มจำนวนหนึ่งจำนวนจาก $1, 2, 3, \ldots, 100$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนนี้
   1) เป็นจำนวนคู่หรือลงท้ายด้วย 3
   2) เป็นจำนวนคี่หรือหารด้วย 5 ลงตัว
   3) เป็นจำนวนคู่และหารด้วย 3 ลงตัว
   4) เป็นจำนวนคู่หรือหารด้วย 3 ลงตัว

กิจกรรม : เพื่อนร่วมชะตา

ในที่นี้ เพื่อนร่วมชะตา หมายถึง ผู้ที่เกิดวันที่และเดือนเดียวกัน แต่ไม่จำเป็นต้องเป็นปีเดียวกัน โดยจะกำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน นั่นคือ ไม่พิจารณาผู้ที่เกิดวันที่ 29 กุมภาพันธ์

ให้นักเรียนตอบคำถามต่อไปนี้

1. ถ้าต้องการให้มั่นใจว่ามีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน นักเรียนคิดว่าจะต้องมีคนอย่างน้อยกี่คน
2. ถ้าสุ่มคนมา 2 คน ความน่าจะเป็นที่ 2 คนนี้ เป็นเพื่อนร่วมชะตากันเป็นเท่าใด
3. ถ้าสุ่มคนมา 3 คน ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 3 คนนี้ เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เป็นเท่าใด
4. นักเรียนคิดว่าความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก 23 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน จะมากกว่า 0.5 หรือไม่ (โดยยังไม่ต้องคำนวณ)
5. ให้นักเรียนเขียนสูตรการหาความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน เมื่อ $n \in \{2, 3, 4, \ldots\}$
6. เปิดเว็บไซต์ ipst.me/8465
   - 6.1 เลื่อนสไลเดอร์เพื่อปรับค่า n สังเกตว่าหน้าจอจะปรากฏความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน
   - 6.2 ตรวจสอบคำตอบในข้อ 4 โดยเลื่อนสไลเดอร์เพื่อหาว่า เมื่อ n มีค่าตั้งแต่เท่าใดขึ้นไป จึงจะได้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.5 คำตอบที่ได้ตรงกับที่นักเรียนตอบในข้อ 4 หรือไม่
   - 6.3 อธิบายกราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง n และความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน จาก n คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน
   - 6.4 จะต้องสุ่มคนอย่างน้อยกี่คน ถ้าต้องการให้ความน่าจะเป็นที่จะมีคนอย่างน้อย 2 คน เป็นเพื่อนร่วมชะตากัน มากกว่า 0.99

แบบฝึกหัดท้ายบท

1. โรงงานแห่งหนึ่งประกอบรถยนต์จำหน่าย โดยมีตัวถังรถ 2 ชนิด เครื่องยนต์ 2 ชนิด และสีพ่นรถ 3 สี
   1) จงเขียนแผนภาพแสดงผลลัพธ์ของการผลิตรถยนต์แบบต่าง ๆ
   2) จงหาปริภูมิตัวอย่างของการผลิตรถยนต์แบบต่าง ๆ

2. ในการโยนเหรียญหนึ่งเหรียญสามครั้ง ถ้าผลลัพธ์ที่สนใจคือหน้าของเหรียญ จงหา
   1) ปริภูมิตัวอย่าง
   2) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวเพียงหนึ่งครั้ง
   3) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวทั้งสามครั้ง
   4) เหตุการณ์ที่เหรียญขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง
   5) เหตุการณ์ที่เหรียญไม่ขึ้นหัวเลย

3. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 3 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง สีขาว และสีเขียวอย่างละ 1 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลครั้งละ 1 ลูก 2 ครั้ง โดยหยิบลูกบอลลูกแรกแล้วใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง จงหา
   1) ปริภูมิตัวอย่าง
   2) เหตุการณ์ที่ได้ลูกบอลสีขาวและสีแดงอย่างละ 1 ลูก

4. บริษัทแห่งหนึ่งมีจำนวนใบสั่งซื้อสินค้าในเดือนหนึ่งจำแนกตามภาคต่าง ๆ ดังนี้

ภาค	จำนวนใบสั่งซื้อสินค้า
เหนือ	212
กลาง	389
ตะวันออก	124
ตะวันออกเฉียงเหนือ	105
ใต้	170

ถ้าผู้จัดการสุ่มใบสั่งซื้อสินค้ามา 1 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ใบสั่งซื้อสินค้าที่สุ่มมาจะเป็นใบสั่งซื้อสินค้าจากภาค

1) เหนือ
2) กลาง
3) ตะวันออก
4) ตะวันออกเฉียงเหนือ
5) ใต้

5 นักเรียน 100 คน สวมรองเท้าขนาดต่าง ๆ ดังแสดงในตารางต่อไปนี้

ขนาดรองเท้า (เบอร์)	5	6	7	8	9	10
จำนวนนักเรียน (คน)	3	12	35	27	16	7

ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะสวมรองเท้า

1) เบอร์ 7
2) เล็กกว่าเบอร์ 8
3) เบอร์ 8 หรือ 9
4) เบอร์ 5 หรือ 10
5) ใหญ่กว่าเบอร์ 10

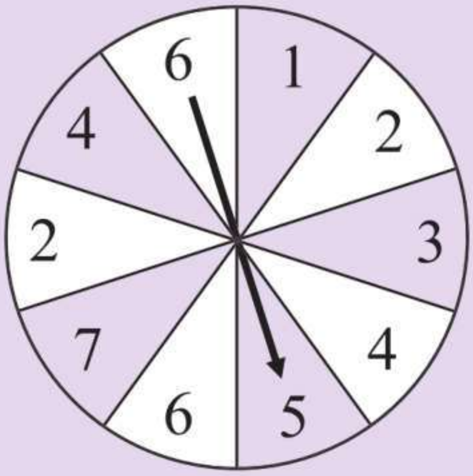
6 ตารางแสดงจำนวนพนักงานขายของบริษัทแห่งหนึ่งจำแนกตามยอดขายที่ทำได้เป็นดังนี้

ยอดขาย (บาท)	**จำนวนพนักงานขาย (คน)**
ต่ำกว่า 10,000	30
10,000 – 19,999	50
20,000 – 29,999	80
30,000 – 39,999	70
ตั้งแต่ 40,000 ขึ้นไป	20

ถ้าสุ่มพนักงานขายในบริษัทนี้มา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานขายคนนี้จะมียอดขาย

1) ตั้งแต่ 10,000 ถึง 19,999 บาท
2) น้อยกว่า 20,000 บาท
3) น้อยกว่า 10,000 บาท หรืออย่างน้อย 40,000 บาท

7 หมุนวงล้อที่มีหมายเลข 1 – 7 เขียนกำกับไว้ดังรูป สมมติว่าในการหมุนแต่ละครั้งโอกาสที่ลูกศรจะชี้ที่ช่องใดช่องหนึ่งมีเท่ากัน ถ้าหมุนวงล้อหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกศรจะชี้ที่



1) ช่องที่มีหมายเลข 1 กำกับไว้
2) ช่องที่มีหมายเลข 6 กำกับไว้
3) ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคู่
4) ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนคี่
5) ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนเฉพาะ
6) ช่องที่มีหมายเลขที่กำกับเป็นจำนวนที่น้อยกว่า 8

8 ในการโยนเหรียญที่เที่ยงตรงหนึ่งเหรียญห้าครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญขึ้นหัวในการโยนครั้งแรก

9 สามีภรรยาคู่หนึ่งต้องการมีลูก 3 คน ถ้าสมมติว่าโอกาสที่ลูกแต่ละคนจะเป็นชายหรือหญิงเท่ากัน จงหาความน่าจะเป็นที่

1) ลูกทั้งสามคนเป็นหญิง
2) มีลูกชายอย่างน้อย 2 คน
3) ลูกคนแรกและคนสุดท้ายเป็นชาย

10. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกันหนึ่งครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่
   1) ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองมากกว่า 3
   2) แต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองไม่เท่ากัน

11. ห้องประชุมแห่งหนึ่งมีประตู 6 บาน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าประชุมคนหนึ่งจะเข้าและออกโดยไม่ใช้ประตูบานเดิม

12. ข้อสอบข้อหนึ่งมีตัวเลือก 5 ตัวเลือก แต่มีตัวเลือกที่ถูกเพียงตัวเลือกเดียว ถ้านักเรียนคนหนึ่งทำข้อสอบข้อนี้โดยไม่มีความรู้เลย จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะตอบผิด

13. จากการสำรวจความนิยมของนักเรียนในโรงเรียน พบว่า ความน่าจะเป็นที่นักเรียนจะซื้อเครื่องดื่มแต่ละชนิดเป็นดังนี้

$$P(E_1)=\frac{1}{6},\ P(E_2)=\frac{3}{10},\ P(E_3)=\frac{2}{5} \text{ และ } P(E_4)=\frac{2}{15}$$

เมื่อ E_1, E_2, E_3 และ E_4 เป็นเหตุการณ์ที่นักเรียนจะซื้อน้ำส้ม น้ำเก๊กฮวย นม และน้ำอัดลม ตามลำดับ ถ้าร้านค้าต้องการนำเครื่องดื่มมาขายเพียง 3 ชนิด ร้านค้าควรนำเครื่องดื่มชนิดใดมาขายบ้าง จึงจะขายได้มากที่สุด

14. ในการแข่งขันวิ่งระยะทาง 100 เมตร มีผู้เข้าแข่งขันจำนวน 5 คน ได้แก่ พิมพ์ หนึ่ง อ้อย เตย และมะลิ ถ้าผู้เข้าแข่งขันทุกคนวิ่งเข้าเส้นชัยในลำดับที่แตกต่างกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เตยจะวิ่งเข้าเส้นชัยเป็นอันดับที่ 1 หรือ 2

15. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีขาว 2 ลูก และสีดำ 5 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่อง 2 ลูก โดยหยิบทีละลูกและไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่หยิบได้
   1) ลูกบอลสีแดงทั้งสองลูก
   2) ลูกบอลสีขาวและสีดำ

16 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอล 8 ลูก เป็นลูกบอลสีแดง 2 ลูก สีเขียว 3 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องครั้งละ 1 ลูก 3 ครั้ง โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบลูกบอลลูกถัดไป จงหาความน่าจะเป็นที่ครั้งที่ 1 หยิบได้ลูกบอลสีแดง และครั้งที่ 2 และ 3 หยิบได้ลูกบอลสีเหลือง

17 กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกแก้ว 12 ลูก เป็นลูกแก้วสีเขียว 4 ลูก สีชมพู 3 ลูก และสีฟ้า 5 ลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกแก้วจากกล่อง 3 ลูก พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกแก้วครบทุกสี

18 นักเรียนห้องหนึ่งมี 30 คน เป็นผู้ชาย 12 คน และผู้หญิง 18 คน ถ้าครูสุ่มนักเรียนสองคนให้ออกมาทำโจทย์หน้าชั้นเรียน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนทั้งสองเป็นผู้ชายทั้งคู่หรือผู้หญิงทั้งคู่

19 ถุงใบหนึ่งมีช็อกโกแลต 40 ชิ้น โดยห่อด้วยกระดาษสีแดง 30 ชิ้น และห่อด้วยกระดาษสีเขียว 10 ชิ้น

1) ถ้าวชิระหยิบช็อกโกแลต 1 ชิ้น ออกจากถุง จงหาความน่าจะเป็นที่เขาหยิบได้ช็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดง
2) ถ้าวชิระหยิบช็อกโกแลต 2 ชิ้น ออกจากถุงพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาหยิบได้ช็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีเดียวกัน
3) ถ้าวชิระหยิบช็อกโกแลต 10 ชิ้น ออกจากถุงพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่เขาหยิบได้ช็อกโกแลตที่ห่อด้วยกระดาษสีแดงอย่างน้อยหนึ่งชิ้น

20 ในงานเลี้ยงของบริษัทแห่งหนึ่งมีพนักงานเข้าร่วม 30 คน เป็นผู้หญิง 20 คน และผู้ชาย 10 คน ถ้าทำสลากใส่ชื่อของพนักงานที่เข้าร่วมงาน แล้วสุ่มหยิบสลากครั้งละ 1 ใบ 2 ครั้ง เพื่อแจกรางวัล โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รางวัลเป็นผู้ชายทั้งคู่

21 ในการคัดเลือกพนักงานเพื่อเป็นกรรมการฝ่ายบริหารแทนกรรมการ 2 คน ที่พ้นตำแหน่งตามวาระ มีพนักงานที่มีคุณสมบัติครบที่จะเป็นกรรมการได้ 10 คน โดยเป็นผู้ชาย 7 คน และผู้หญิง 3 คน ถ้าประธานบริษัทตัดสินใจเลือกพนักงาน 2 คน จาก 10 คนนี้ โดยไม่เจาะจง จงหาความน่าจะเป็นที่พนักงานที่ได้รับเลือกเป็นกรรมการทั้งสองนี้

1) เป็นผู้ชายหนึ่งคนและผู้หญิงหนึ่งคน
2) เป็นผู้หญิงอย่างน้อยหนึ่งคน
3) เป็นผู้ชายอย่างน้อยหนึ่งคน

22 กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 5 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 1, 2, 3, 4 และ 5 กำกับไว้ ถ้าสุ่มหยิบบัตรจากกล่องใบนี้ 3 ใบ พร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของหมายเลขบนบัตรทั้งสามมากกว่า 10

23 ในชมรมกรีฑามีนักกรีฑาทั้งหมด 40 คน โดยมีฝาแฝด 3 คู่ ถ้าสุ่มนักกรีฑามา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักกรีฑาคนนี้จะมีฝาแฝด

24 ตะกร้าใบหนึ่งมีเงาะ 4 ผล ส้ม 3 ผล และชมพู่ 5 ผล ถ้าสุ่มหยิบผลไม้จากตะกร้า 4 ผล จงหาความน่าจะเป็นที่ได้เงาะ 2 ผล และส้มกับชมพู่อย่างละ 1 ผล

25 นักเรียนคนหนึ่งมีจดหมาย 3 ฉบับ ถ้ามีตู้จดหมาย 5 ตู้ จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะใส่จดหมายในตู้ที่ไม่ซ้ำกันเลย

26 กล่องใบหนึ่งบรรจุบัตร 5 ใบ ซึ่งมีหมายเลข 2, 5, 6, 7 และ 8 กำกับไว้ ถ้าสุ่มหยิบบัตรตัวเลข 2 ใบ โดยหยิบทีละใบและใส่คืนก่อนจะหยิบบัตรใบที่สอง จงหาความน่าจะเป็นที่

1) บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเดียวกัน
2) บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขไม่ซ้ำกัน
3) บัตรทั้งสองใบมีหมายเลขเป็นจำนวนคู่
4) ผลบวกของหมายเลขบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่

27 ชมรมหนึ่งมีสมาชิก 20 คน โดยสมศรีและสมปองเป็นสมาชิกของชมรมนี้ด้วย ถ้าใช้การจับสลากเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วยนายกชมรม อุปนายกชมรม เลขานุการ และเหรัญญิก ตำแหน่งละ 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่สมศรีได้เป็นนายกชมรมและสมปองได้เป็นอุปนายกชมรม

28 ไพ่สำรับหนึ่งมีไพ่ทั้งหมด 52 ใบ สุ่มหยิบไพ่ 2 ใบ พร้อมกันจากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่ได้
1) ไพ่ที่มีหน้าสีแดงทั้งสองใบ
2) ไพ่โพดำและโพแดง
3) ไพ่ J ทั้งสองใบ

29 กล่องใบหนึ่งบรรจุสลาก 10 ใบ โดยมีหมายเลข 1, 2, 3, … , 10 กำกับไว้ ถ้าแหวนสุ่มหยิบสลาก 2 ใบ โดยหยิบทีละใบ และต้องการให้ผลบวกของหมายเลขบนสลากทั้งสองเท่ากับ 10 จงพิจารณาว่าแหวนควรจะใส่สลากคืนหรือไม่ใส่คืนก่อนจะหยิบสลากใบที่สอง จึงจะมีโอกาสมากกว่ากัน เพราะเหตุใด

30 ครูคนหนึ่งมีเสื้อ 5 ตัว เป็นสีดำ 1 ตัว สีขาว 4 ตัว และมีกางเกงขายาว 4 ตัว เป็นสีดำ 2 ตัว สีเทา 2 ตัว ถ้าครูคนนี้แต่งตัวออกจากบ้านโดยไม่เจาะจง จงหาความน่าจะเป็นที่ครูคนนี้จะสวมเสื้อและกางเกงสีต่างกัน

31 พัดลมยี่ห้อหนึ่งที่บริษัท เอกชัย จำกัด รับมาจำหน่ายจำนวน 20 เครื่อง มีคุณภาพดีมาก 8 เครื่อง คุณภาพดี 9 เครื่อง และคุณภาพปานกลาง 3 เครื่อง ถ้านักเรียนซื้อพัดลมยี่ห้อนี้จากบริษัทดังกล่าวจำนวน 3 เครื่อง จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนจะได้พัดลมที่
1) มีคุณภาพดีมากทั้งสามเครื่อง
2) มีคุณภาพปานกลางทั้งสามเครื่อง
3) มีคุณภาพปานกลางอย่างน้อยหนึ่งเครื่อง
4) มีคุณภาพดีมากสองเครื่องและปานกลางหนึ่งเครื่อง
5) มีคุณภาพดีมาก ดี และปานกลางอย่างละเครื่อง

32 ในวันเปิดภาคเรียน ทอรุ้งต้องนำเงินไปจ่ายค่ากิจกรรมนอกหลักสูตร ทอรุ้งจึงฝากคุณอากดเงินที่ตู้เอทีเอ็มให้เพราะทุกเช้าคุณอาจะไปตลาดและผ่านตู้เอทีเอ็มเสมอ แต่เมื่อคุณอาถึงตู้เอทีเอ็มปรากฏว่าคุณอาจำรหัสบัตรเอทีเอ็มได้เพียง 2 ตัวแรก และรู้ว่าเลขโดดอีก 2 ตัวที่เหลือแตกต่างกัน ถ้ารหัสบัตรเอทีเอ็มประกอบด้วยเลขโดด $0, 1, 2, 3, \ldots, 9$ จำนวน 4 ตัว จงหาความน่าจะเป็นที่คุณอาจะเดารหัสบัตรเอทีเอ็มของทอรุ้งถูกในการกดรหัสครั้งแรก

33 ร้านค้าแห่งหนึ่งจัดกิจกรรมมอบโชคให้แก่ลูกค้าที่มาซื้อของภายในร้าน โดยจัดทำกล่องบรรจุบัตรเงินสดมูลค่า 100 บาท จำนวน 50 ใบ บัตรเงินสดมูลค่า 25 บาท จำนวน 100 ใบ และบัตรเงินสดมูลค่า 10 บาท จำนวน 350 ใบ ถ้าลูกค้าคนหนึ่งสามารถสุ่มหยิบบัตรเงินสดจากกล่องได้พร้อมกัน 2 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่บัตรเงินสดทั้งสองใบที่ลูกค้าคนนี้สุ่มหยิบได้มีมูลค่าน้อยกว่า 100 บาท

34 ครูจัดกลุ่มนักเรียน 6 คน ซึ่งมีฝาแฝดอยู่คู่หนึ่ง เป็น 3 กลุ่ม กลุ่มละ 2 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ฝาแฝดคู่นี้อยู่กลุ่มเดียวกัน

35 ลูกเต๋า 8 หน้า มีลักษณะเป็นทรงแปดหน้าปรกติ แต่ละหน้าจะมีแต้มตั้งแต่ 1 ถึง 8 ถ้าทอดลูกเต๋า 8 หน้า ที่เที่ยงตรงสองลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่



1) ลูกเต๋าทั้งสองลูกขึ้นแต้มเท่ากัน
2) ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองหารด้วย 5 ลงตัว
3) ผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 2
4) ผลรวมของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็นจำนวนคู่ และผลต่างของแต้มบนหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 4

36 บริษัทนำเที่ยวจัดโปรแกรมเที่ยวรอบเมืองลำปางสำหรับกลุ่มนักท่องเที่ยว 10 คน โดยใช้รถม้าทั้งหมด 3 คัน สองคันแรกนั่งได้คันละ 4 คน และคันที่สามนั่งได้ 2 คน ถ้ามีนักท่องเที่ยว 2 คน เป็นเพื่อนสนิทกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนจะได้นั่งรถม้าคันที่สาม โดยไม่สนใจตำแหน่งที่นั่งในรถ



37 ร้านอาหารแห่งหนึ่งต้องการประดับตกแต่งร้าน โดยนำหลอดไฟจำนวน 10 หลอด ซึ่งประกอบด้วยหลอดไฟสีม่วง 3 หลอด สีเขียว 2 หลอด สีน้ำเงิน 4 หลอด และสีเหลือง 1 หลอด ไปติดเรียงในแนวเส้นตรง ถ้าหลอดไฟสีเดียวกันถือว่าเหมือนกัน จงหาความน่าจะเป็นที่

1) หลอดไฟสีเดียวกันอยู่ติดกัน
2) หลอดไฟสีม่วงไม่อยู่ติดกัน

38 ลัดดาต้องการประดับตกแต่งรั้วบ้านต้อนรับเทศกาลปีใหม่ โดยนำหลอดไฟที่มีอยู่แล้วจำนวน 10 หลอด ซึ่งเป็นหลอดไฟสีแดง 2 หลอด สีเขียว 3 หลอด สีฟ้า 2 หลอด สีม่วง สีชมพู และสีส้มอย่างละ 1 หลอด ไปติดเรียงในแนวเส้นตรง ถ้าหลอดไฟสีเดียวกันถือว่าเหมือนกัน จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟหลอดสุดท้ายเป็นสีม่วงหรือสีส้ม

39 ครอบครัวสองครอบครัวไปรับประทานอาหารร่วมกันที่ภัตตาคารแห่งหนึ่ง ถ้าแต่ละครอบครัวประกอบด้วยพ่อ แม่ และลูก 1 คน และโต๊ะอาหารเป็นโต๊ะกลมซึ่งมี 6 ที่นั่ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1) ไม่มีสมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน
2) สมาชิกในครอบครัวเดียวกันนั่งติดกัน

40 ครอบครัวหนึ่งประกอบด้วยพ่อ แม่ และลูกอีก 3 คน ไปรับประทานอาหารที่ร้านอาหารแห่งหนึ่ง ถ้าโต๊ะอาหารเป็นโต๊ะกลมซึ่งมี 5 ที่นั่ง จงหาความน่าจะเป็นที่

1) ลูกทั้งสามคนนั่งติดกัน
2) พ่อและแม่ไม่นั่งติดกัน

41 ถ้าความน่าจะเป็นที่ธงชัยจะสอบผ่านวิชาคณิตศาสตร์เป็น 0.6 ความน่าจะเป็นที่ธงชัยจะสอบผ่านวิชาภาษาอังกฤษเป็น 0.5 และความน่าจะเป็นที่ธงชัยจะสอบผ่านอย่างน้อย 1 วิชา เป็น 0.8 จงหาความน่าจะเป็นที่ธงชัยจะสอบผ่านทั้งสองวิชานี้

42 จากการสำรวจนักเรียนจำนวน 120 คน พบว่า มีนักเรียนที่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 60 คน มีนักเรียนที่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 50 คน และมีนักเรียนที่ชอบเรียนทั้งสองวิชา 20 คน ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะ

1) ชอบเรียนอย่างน้อย 1 วิชา
2) ไม่ชอบเรียนทั้งสองวิชา
3) ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ แต่ไม่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ
4) ชอบเรียนอย่างมาก 1 วิชา

43 ในการประชุมครั้งหนึ่ง มีผู้เข้าร่วมประชุมจำนวน 300 คน โดยเป็นผู้ที่ประกอบอาชีพค้าขาย 160 คน รับจ้าง 90 คน ค้าขายและรับจ้าง 40 คน ถ้าสุ่มผู้เข้าร่วมประชุมมา 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่ผู้เข้าร่วมประชุมคนนี้จะไม่ประกอบอาชีพค้าขายหรือรับจ้าง

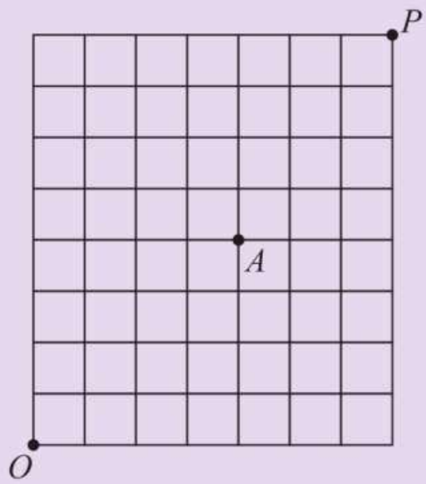
44 จากการสำรวจคอมพิวเตอร์ใหม่ที่นำมาใช้ในสำนักงานแห่งหนึ่งเป็นเวลาหนึ่งเดือน พบว่าความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากกระแสไฟฟ้ามากเกินไปเป็น 0.06 ความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากฮาร์ดดิสก์เสียเป็น 0.03 ความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากซีพียูทำงานหนักเป็น 0.01 ความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากสองสาเหตุใด ๆ ที่กล่าวมาเป็นศูนย์ และความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากทั้งสามสาเหตุที่กล่าวมาเป็นศูนย์ จงหาความน่าจะเป็นที่คอมพิวเตอร์จะชำรุดจากกระแสไฟฟ้ามากเกินไปหรือฮาร์ดดิสก์เสียหรือซีพียูทำงานหนัก

45. พิจารณาเกมบันไดงูดังรูป วิธีการเล่น คือ ให้ผู้เล่นผลัดกันทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 1 ลูก 1 ครั้ง แล้วเดินหมากไปบนช่องตามแต้มที่ปรากฏบนหน้าลูกเต๋า ถ้าตกช่องที่มีตีนบันได ให้เลื่อนหมากขึ้นไปจนสุดขั้นบันได แต่ถ้าตกช่องที่มีหัวงู ให้เลื่อนหมากลงไปยังหางงู สมมติว่าตอนนี้หมากอยู่บนช่องหมายเลข 16 จงหาความน่าจะเป็นที่อีกสองตา หมากจะไปอยู่บนช่องหมายเลขน้อยกว่าหรือเท่ากับ 16



46. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 8 เล่ม ในจำนวนนี้เป็นหนังสือคณิตศาสตร์ 3 เล่ม ถ้าต้องการจัดหนังสือเป็นแถวยาว จงหาความน่าจะเป็นที่ไม่มีหนังสือคณิตศาสตร์สองเล่มใดอยู่ติดกัน

47. จากรูป



ถ้าต้องการเดินทางออกจากจุด O ไปยังจุด P โดยมีเงื่อนไขว่าจะต้องเดินทางไปทางทิศเหนือหรือทิศตะวันออกเท่านั้น จงหาความน่าจะเป็นที่จะเดินทางโดยไม่ผ่านจุด A

บรรณานุกรม

กองทุนส่งเสริมและพัฒนาการใช้อักษรเบรลล์แห่งชาติ. (2554). *คู่มือมาตรฐานการใช้อักษรเบรลล์ในประเทศไทย.*

ประกาศคณะกรรมการกิจการกระจายเสียง กิจการโทรทัศน์ และกิจการโทรคมนาคมแห่งชาติ เรื่อง แผนเลขหมายโทรคมนาคม. (2557, 7 พฤษภาคม). *ราชกิจจานุเบกษา.* เล่ม 131 ตอนพิเศษ 75 ง. หน้า 49-54.

ประกาศคณะกรรมการกิจการโทรคมนาคมแห่งชาติ เรื่อง แผนเลขหมายโทรคมนาคม. (2549, 18 พฤษภาคม). *ราชกิจจานุเบกษา.* เล่ม 123 ตอนที่ 50 ง. หน้า 28-37.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2559). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4–6 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 10). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2561). *หนังสือเรียนรายวิชาพื้นฐานคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามมาตรฐานการเรียนรู้และตัวชี้วัด กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

สำนักงานพัฒนาธุรกรรมทางอิเล็กทรอนิกส์ (องค์การมหาชน). (2558, 3 กุมภาพันธ์). *Security Tips*. สืบค้นเมื่อ 17 มิถุนายน 2561, จาก https://www.etda.or.th/content/security-tips.html

สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา. (2561). *หนังสือเรียน รายวิชาพื้นฐาน ภาษาไทย วรรณคดีวิจักษ์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 กลุ่มสาระการเรียนรู้ภาษาไทย ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* (พิมพ์ครั้งที่ 11). กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ สกสค. ลาดพร้าว.

อลงกต ใหม่ด้วง. (2558). ความน่าจะเป็นที่ไม่น่าจะเป็นลองเล่นเห็นได้ด้วยคณิตศาสตร์. *นิตยสาร สสวท.*, 43(193), 19-23.

อัมริสา จันทนะศิริ. (2559). ไขปัญหาขุมทรัพย์ กับจำนวนเชิงซ้อน. *นิตยสาร สสวท.*, 44(198), 23-26.

Azad, K. *A Visual, Intuitive Guide to Imaginary Numbers*. Retrieved March 20, 2018, from http://betterexplained.com/articles/a-visual-intuitive-guide-to-imaginary-numbers

Azad, K. *Understanding the Monty Hall Problem*. Retrieved June 5, 2016, from https://betterexplained.com/articles/understanding-the-monty-hall-problem

Burton, D. M. (2011). *The History of Mathematics: An Introduction* (7th ed). Singapore: The McGraw-Hill Companies, Inc.

Gamow, G. (1988). *One, Two, Three ... Infinity: Acts and Speculations of Science*. New York, NY: Dover Publications.

Johnson, R. P. (2006). *Using Complex Numbers in Circuit Analysis Review of the Algebra of Complex Numbers*. Retrieved January 24, 2018, from https://webuser.hs-furtwangen.de/~hoenig/2016/Wiki/et2_s09/zum_selber_lesen/Komplex/ComplexNumbers

Murdock, J., Kamischke, E. & Kamischke, E. (2004). *Discovering Advanced Algebra: An Investigative Approach: Teacher's Edition*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.

Sultan, A. & Artzt, A. F. (2011). *The Mathematics that Every Secondary School Math Teacher Needs to Know*. New York, NY: Routledge.

ที่มาของภาพ

หน้า 2	Brennan Burling/Unsplash
หน้า 67	REDPIXEL.PL/Shutterstock.com
หน้า 124	Wikimedia Commons/Public Domain
หน้า 144	(ซ้าย) Wikimedia Commons/Public Domain
	(ขวา) Wikimedia Commons/Public Domain

กราฟทั้งหมดในหนังสือเรียนเล่มนี้สร้างด้วยโปรแกรม GeoGebra

ภาคผนวก

ดัชนี

บัญชีสัญลักษณ์

บทที่ 1

i	จำนวนเชิงซ้อน $(0,1)$
(a,b), $a+bi$	จำนวนเชิงซ้อน
$\mathrm{Re}(z)$	ส่วนจริงของ z
$\mathrm{Im}(z)$	ส่วนจินตภาพของ z
$\overline{z}$	สังยุคของ z
$\lvert z\rvert$	ค่าสัมบูรณ์ของ z

บทที่ 2

$n!$	แฟกทอเรียล n
$P_{n,r}$	จำนวนวิธีในการนำสิ่งของ r ชิ้น จากสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น มาเรียงสับเปลี่ยนเชิงเส้น
$C_{n,r}$, $\binom{n}{r}$	จำนวนวิธีจัดหมู่ของสิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น โดยเลือกคราวละ r ชิ้น

บทที่ 3

$P(E)$	ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E

คณะผู้จัดทำ

ที่ปรึกษา

ศ. ดร.ชูกิจ ลิมปิจำนงค์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

คณะผู้จัดทำหนังสือเรียน

นายประสาท สอ้านวงศ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สมพร สูตินันท์โอภาส	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
รศ. ดร.สิริพร ทิพย์คง	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจินตนา อารยะรังสฤษฎ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายสุเทพ กิตติพิทักษ์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวจำเริญ เจียวหวาน	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.อลงกรณ์ ตั้งสงวนธรรม	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปฐมาภรณ์ อวชัย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวอัมริสา จันทนะศิริ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายพัฒนชัย รวิวรรณ	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวภิญญดา กลับแก้ว	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ศศิวรรณ เมลืองนนท์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.สุธารส นิลรอด	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นายทศธรรม เมฆลา	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ดร.ธนากร ปริญญาศาสตร์	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ผศ. ดร.คำรณ เมฆฉาย	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ดร.วรพรรณ จันทร์ดี	มหาวิทยาลัยบูรพา
ดร.ธีระเดช กิตติภัสสร	นักวิชาการอิสระ
ดร.นิธิ รุ่งธนาภิรมย์	นักวิชาการอิสระ

คณะบรรณาธิการ

รศ. ดร.วิชาญ ลิ่วกีรติยุตกุล	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.อมร วาสนาวิจิตร์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
รศ. ดร.ณัฐกาญจน์ ใจดี	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
ผศ. ดร.เก่ง วิบูลย์ธัญญ์	จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

ฝ่ายสนับสนุนวิชาการ

ดร.ปิยฉัตร ศรีประทักษ์	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.ศุภณัฐ ชัยดี	มหาวิทยาลัยเชียงใหม่
ดร.สารัตน์ ศิลปวงษา	มหาวิทยาลัยบูรพา
ดร.ทิพาลัคน์ กฤตยาเกียรณ์	มหาวิทยาลัยมหิดล
นายชัยรัตน์ สุนทรประพี	นักวิชาการอิสระ
สาขาวิทยาศาสตร์มัธยมศึกษาตอนปลาย	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
ฝ่ายนวัตกรรมเพื่อการเรียนรู้	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
นางสาวปิยาภรณ์ ทองมาก	สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

ออกแบบปก

บริษัท พิงค์ บลู แบล็ค แอนด์ ออเร้งจ์ จำกัด

ออกแบบรูปเล่ม

บริษัท เพอลังอิ พับลิชชิ่ง (ประเทศไทย) จำกัด

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี
กระทรวงศึกษาธิการ